GEOMETRÍA

2 TRIÁNGULOS

TEORÍA - DEMOSTRACIONES
TRAZOS AUXILIARES

600 PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

JULIO ORIHUELA BASTIDAS
SMITH E. VALDEZ

a
b
$n\alpha$
α

En el gráfico, $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$.

Se cumple: $a < b < na$



GEOMETRÍA
TRIÁNGULOS

Autor : Julio Orihuela Bastidas

Editor : CUZCANO EDITORIAL E IMPRENTA E.I.R.L.

Composición, diagramación y montaje :
Área de cómputo y publicaciones de Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña

Primera edición : Mayo 2017

Tiraje : 1 000 ejemplares

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2017-05447

Obra editada, impresa y distribuida por:
CUZCANO EDITORIAL E IMPRENTA E.I.R.L.
Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña
Teléfono 423-8154



LIMA - PERÚ



El aprendizaje ha sido desde los albores de la humanidad la actividad humana más enriquecedora que ha permitido y garantizado el desarrollo social.

En su afán de comprender y dar solución a los problemas prácticos, el hombre creó un lenguaje artificial como el de las matemáticas que le permitió esclarecer la incognoscible realidad.

Escribir un libro es una labor ardua pero que se reconforta no por los réditos económicos sino por el aporte a la cadena ascendente del conocimiento. Éste no es un texto repetidor de ideas, del cual esta plagado el mercado, sino innovador, verdadero aporte a las ciencias.

He divido este libro de triángulos en dos partes: teoría y problemas. La primera es un enfoque sobre definiciones, clasificación y teoremas sobre el triángulo, completando en la parte final un articulo breve sobre dobleces; y la parte práctica contiene 600 problemas, divididos en resueltos y propuestos, además se subdividen en problemas tipo anual; que son dirigidos a un ciclo básico estudiantes en proceso de formación; problemas del CEPRE-UNI; que son problemas extraídos de sus distintos ciclos, problemas tipo semestral; que van dirigidos a un publico con cierta experiencia; semestral intensivo; que van orientados a afianzar los conocimientos, son problemas de un nivel por encima del examen de admisión; y problemas de repaso, se trata de problemas tipo examen de admisión. Todo ello con el fin de ubicar al estudiante dependiendo del ciclo en el que se encuentra y contribuir de alguna manera a la formación científica del estudiante.

La sugerencia para el lector es intentar previamente los problemas, persistir y ser perseverante. Las soluciones y demostraciones aquí presentadas no son las únicas ni las mejores, solo son sugerencias, como guías para el lector, del cual espero sus observaciones y criticas, las cuales serán bien recibidas.

Julio Orihuela Bastidas

Agradecimiento

- A mis padres por todo su apoyo, así como a mis hermanos y mis sobrinitos que hacen grato el día a día.
- A todo el grupo de Editorial Cuzcano, por su confianza y apoyo.
- A los profesores Luis Saavedra, Renzo Pardo y Jhon Cuya por sus observaciones y sugerencias.
- A todos mis alumnos y ex alumnos, muchos de ellos ya en la universidad en especial para los alumnos del circulo del colegio Prolog, de selección del Colegio Saco Oliveros y del colegio Von Newman de Huánuco.

Indice





Indice

Pág.

Indice

TRIÁNGULOS

TRIÁNGULOS

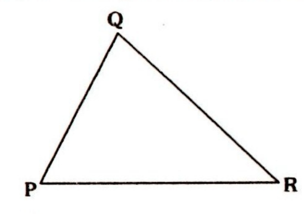
GEOMETRÍA

La geometría es hermosa y algunos de sus teoremas son tan sorprendentes que casi parecen milagrosas. De hecho, el mismo comentario podría hacerse con respecto a toda el área de las Matemáticas, pero la Geometría es única, en el sentido que sus "milagros" son visuales.

J. Martin Isaacs
Geometría Universitaria

DEFINICIÓN[1]

Dados tres puntos no colineales, se define el triángulo como la unión de los segmentos de recta cuyos extremos son dichos puntos. A los puntos no colineales se les denominará vértices y a los segmentos, lados del triángulo.



En el gráfico:

P, Q, R: Puntos no colineales

Elementos:

Vértices: P, Q y R

Lados: $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{RP}$

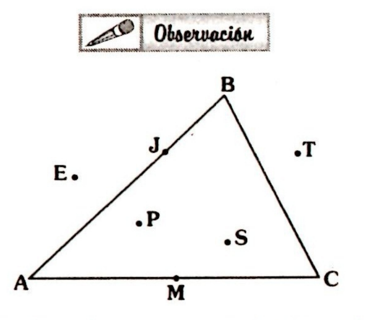
Notación:

ΔPQR : Se lee triángulo de vértices P, Q y R o simplemente triángulo PQR.

Así tenemos:

$$\Delta PQR = \{\overline{PQ} \cup \overline{QR} \cup \overline{RS}\}$$

Observación



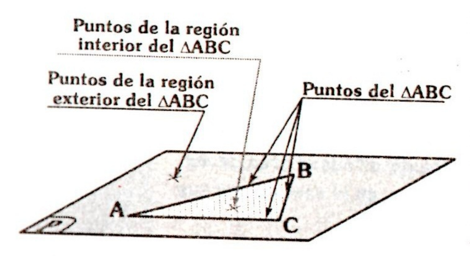
En el gráfico, se tiene el triángulo ABC, podemos afirmar:

- P, S, T y E *como no están en los lados, entonces no están en el* ΔABC.
- J y M *están en los lados* AB y AC, *entonces,* J y M *si están en el* ΔABC.

(1) ver anexos otros tipos de triángulos.

REGIONES ASOCIADAS AL TRIÁNGULO

Al ubicar un triángulo en el plano, se distinguirán tres conjuntos de puntos: puntos de la región interior, que está conformada por los puntos limitados por el triángulo; puntos del triángulo; y los puntos de la región exterior, que está conformada por los puntos del plano que no están en el triángulo ni en la región interior.



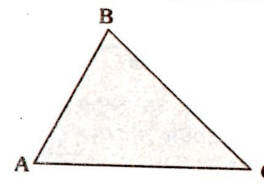
En el gráfico, tenemos el triángulo ABC ubicado en el plano P. Están representadas los conjuntos de puntos.



- *Si ubicamos un punto en el plano P, este punto se ubicará en la región interior, en el triángulo o en la región exterior.*

REGIÓN TRIANGULAR

Se llama región triangular a la unión de un triángulo con su región interior.



Notación:

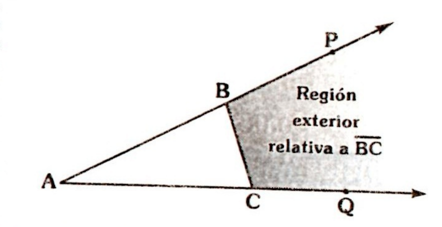
▲ABC: región triangular ABC.

En el gráfico:

$$\blacktriangle ABC = \{\Delta ABC \cup \{\text{reg. interior}\}\}$$

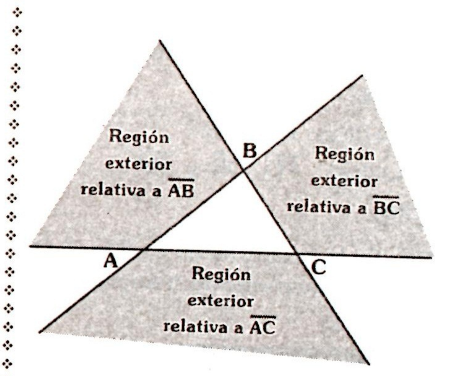
REGIÓN EXTERIOR RELATIVA A UN LADO

Se denominará así a la diferencia de conjuntos de la región interior del ángulo determinado por dos lados y la región triangular.



En el gráfico a la región interior del ∢PAQ, (que es el determinado por los lados AB y AC), se le ha quitado la región triangular ABC, con lo cual tendremos la región exterior relativa a $\overline{BC}$, que está representado por la región sombreada.

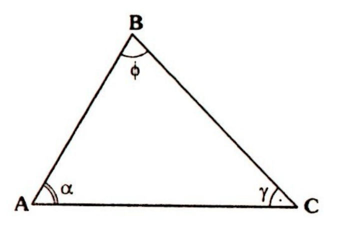
Así tenemos:



ÁNGULO INTERIOR Y EXTERIOR EN EL TRIÁNGULO

Se llama ángulo interior al ángulo determinado por dos lados del triángulo.

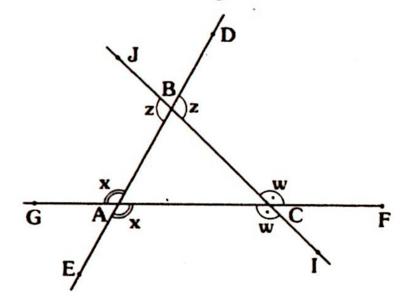
El ángulo exterior es el ángulo suplementario y adyacente del ángulo interior.



En el gráfico:

∢ABC, ∢BAC y ∢ACB

Son los ángulos interiores cuyas medidas son ϕ, α y γ respectivamente.



En el gráfico:

∢GAB, ∢EAC, ∢ACI, ∢FCB, ∢CBD y ∢ABJ

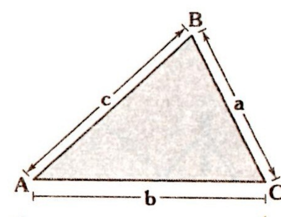
son los ángulo exteriores.

Se puede observar que en cada vértice se determinan dos ángulos exteriores, los cuales son opuestos por el vértice y por teorema son de igual medida.

Así tenemos que las medidas de los ángulos exteriores en el gráfico son **x, z y w**.

PERÍMETRO DE LA REGIÓN TRIANGULAR

El perímetro(2) de una región triangular es la longitud de su contorno, es decir la suma de las longitudes de sus lados.



En el gráfico:

Los lados del triángulo miden a, b y c entonces el perímetro de la región triangular será: $a+b+c$.

Se representa el perímetro con: 2p, $2p_{\Delta ABC}$ o con una letra minúscula (ℓ por ejemplo)

Así tenemos:

$$2p_{\Delta ABC} = 2p = \ell = a+b+c$$

De las dos primeras notaciones, tenemos:

$$p_{\Delta ABC} = p = \frac{a+b+c}{2}$$

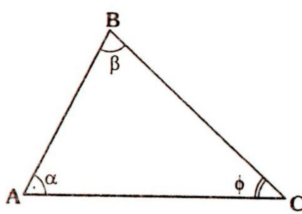
el cual representará el semiperímetro de la región triangular ABC.

(2) ver anexos, se define perímetro de cualquier región plana.

TEOREMAS FUNDAMENTALES EN EL TRIÁNGULO

TEOREMA 1

La suma de medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

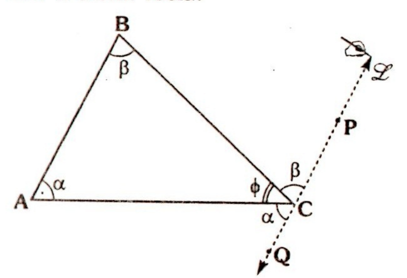


En el gráfico, se cumple:

$$\alpha+\beta+\phi=180°$$

Demostración

- Usaremos un equivalente al quinto postulado de Euclides[3], el cual nos garantiza que por un punto exterior a una recta se puede trazar una recta paralela y solo una a dicha recta.



- Por C trazamos $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, ello esta garantizado por el postulado V, de Euclides[3].
- Por ángulos alternos internos:

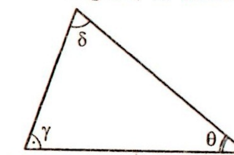
$$m\measuredangle ACQ=\alpha \quad y \quad m\measuredangle BCP=\beta$$

- En C, tenemos:

$$\alpha+\phi+\beta=180°$$

Corolario:

La suma de medidas de dos ángulos interiores en el triángulo, es menor que 180°.



En el gráfico, se cumple:

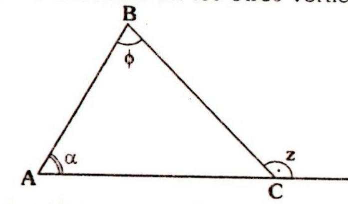
$$\delta+\theta<180°$$

$$\gamma+\theta<180°$$

$$\delta+\gamma<180°$$

TEOREMA 2

La medida de un ángulo exterior en un vértice es igual a la suma de medidas de los ángulos interiores en los otros vértices.

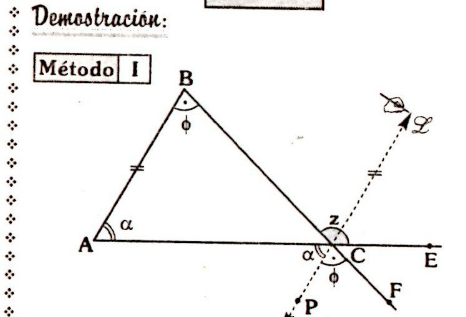


En el gráfico, se cumple:

$$z=\alpha+\phi$$

Demostración:

Método I



(3) En la sección de anexos se da los postulados de Euclides, así como otras posibilidades de la demostración.

- Por C, se traza la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.
- Por ángulos alternos internos:

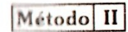
$$m\measuredangle PCA=\alpha$$

- Por ángulos correspondientes:

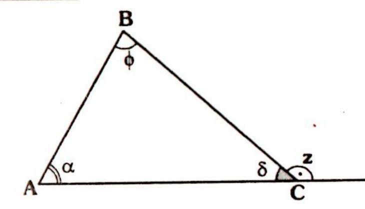
$$m\measuredangle FCP=\phi$$

- Por ángulos opuestos por el vértice:

$$z=\alpha+\phi$$



Método II



- Por teorema 1:

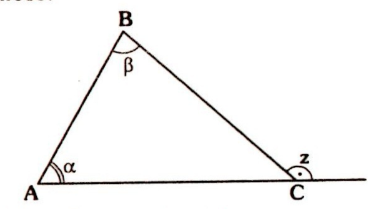
$$\alpha+\delta+\phi=180° \qquad \dots(I)$$

- Pero: $$z+\delta=180° \qquad \dots(II)$$
- De (I) y (II): $z+\cancel{\delta}=\alpha+\cancel{\delta}+\phi$

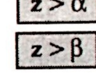
$$\therefore\ z=\alpha+\phi$$

Corolario:

La medida del ángulo exterior en un vértice es mayor que la medida de cualquiera de los ángulos interiores en los otros vértices.



En el gráfico, se cumple:

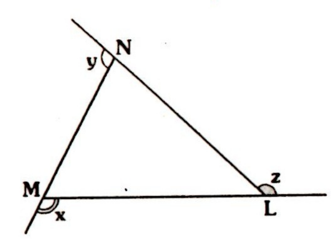


$$z>\alpha$$

$$z>\beta$$

TEOREMA 3

La suma de las medidas de los ángulos exteriores, considerando uno por cada vértice, es 360°.

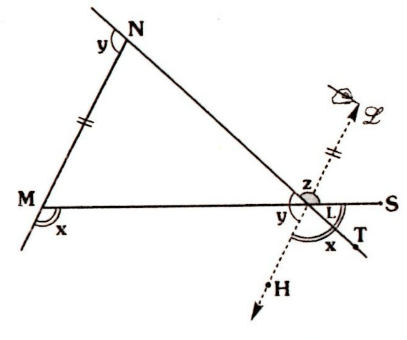


En el gráfico, se cumple:

$$x+y+z=360°$$

Demostración:

Método I



- Por el vértice L, trazamos la recta $\mathscr{L}$ paralela a $\overline{MN}$.
- Por ángulos correspondientes:

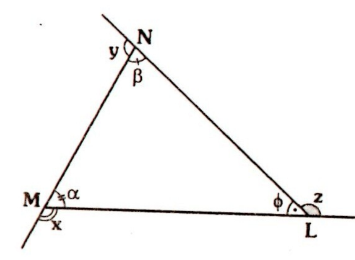
$$m\measuredangle SLH=x$$

$$m\measuredangle HLN=y$$

- En L, se puede afirmar:

$$x+y+z=360°$$

Método II



- Por el teorema 2, del cálculo del ángulo exterior:

$$x = \beta + \phi \quad \ldots (a)$$
$$y = \alpha + \phi \quad \ldots (b)$$
$$z = \alpha + \beta \quad \ldots (c)$$

- Sumando (a), (b) y (c):

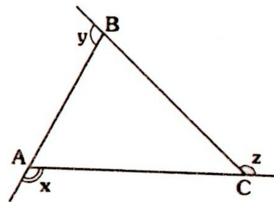
$$x + y + z = 2(\alpha + \beta + \phi)$$

- Como: $\alpha + \beta + \phi = 180°$

$$\therefore\ x + y + z = 360°$$

Corolario:

La suma de medidas de dos ángulos exteriores (en diferentes vértices) es menor a 360°.



En el gráfico, se cumple:

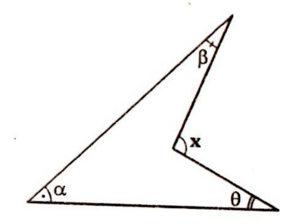
$$\boxed{x + y < 360°}$$
$$\boxed{y + z < 360°}$$
$$\boxed{z + x < 360°}$$

TEOREMAS ADICIONALES

A continuación indicaremos algunas teoremas sobre las relaciones de medidas angulares en ciertas figuras, dichos teoremas se deducen de los teoremas fundamentales. Por su uso frecuente en la resolución de ejercicios, es importante conocerlas.

En algunos casos se generaliza.

TEOREMA 4

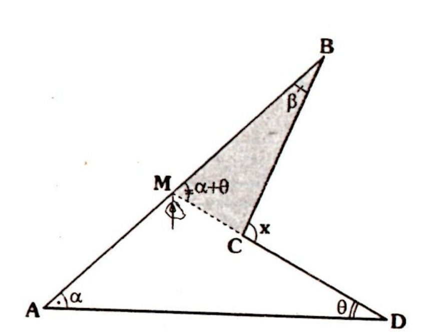


En el gráfico, se cumple:

$$\boxed{x = \alpha + \beta + \theta}$$

Demostración:

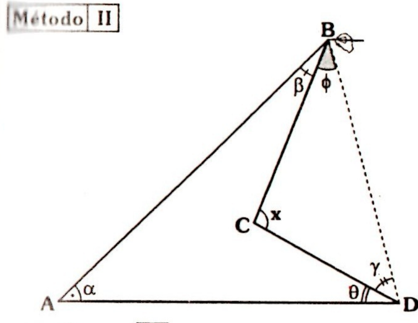
Método I



- Se prolonga $\overline{DC}$ hasta que corte a $\overline{AB}$ en M.
- Por teorema (*medida del ∢ exterior*)

$$\Delta AMD : m\measuredangle BMC = \alpha + \theta$$
$$\Delta CMB : x = \alpha + \theta + \beta$$

Método II



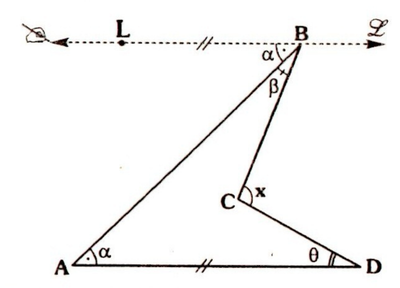
- Se traza $\overline{BD}$.
- Por teorema 1:

$$\Delta BCD : x + \phi + \gamma = 180° \quad \ldots (I)$$
$$\Delta ABD : \alpha + \beta + \phi + \gamma + \theta = 180° \quad \ldots (II)$$

- De (I) y (II):

$$x + \phi + \gamma = \alpha + \beta + \phi + \gamma + \theta$$
$$\therefore\ x = \alpha + \beta + \theta$$

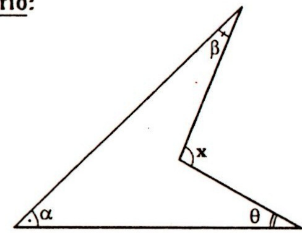
Método III



- Por B trazamos la recta $\mathscr{L}$ paralela a $\overline{AD}$.
- Por $\measuredangle_s$ alternos internos: $m\measuredangle LBA = \alpha$
- Por teorema sobre paralelas:

$$x = \alpha + \beta + \theta$$

Corolario:



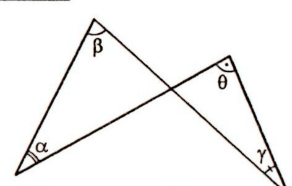
En el gráfico, se cumple:

$$\boxed{x > \alpha\ ;\ x > \beta\ ;\ x > \theta}$$

También:

$$\boxed{x > \theta + \beta\ ;\ x > \beta + \alpha\ ;\ x > \theta + \alpha}$$

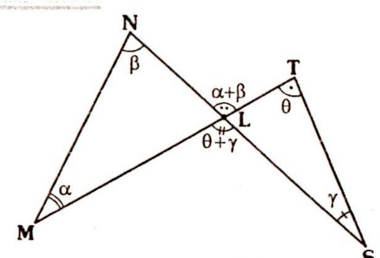
TEOREMA 5



En el gráfico, se cumple:

$$\boxed{\alpha + \beta = \theta + \gamma}$$

Demostración:



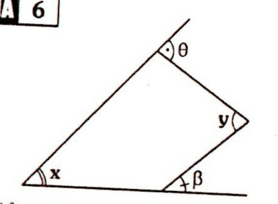
- Por teorema del cálculo del ∢ exterior:

$$\Delta MNL : m\measuredangle NLT = \alpha + \beta$$
$$\Delta LTS : m\measuredangle MLS = \theta + \gamma$$

- Por ∢ opuestos por el vértice:

$$\alpha + \beta = \theta + \gamma$$

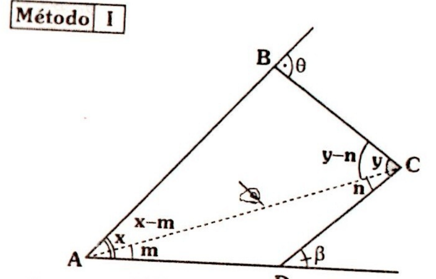
TEOREMA 6



En el gráfico, se cumple: $x+y=\theta+\beta$

Demostración

Método I



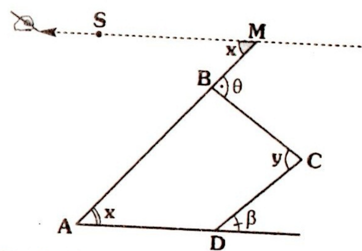
- Se traza $\overline{AC}$, por teorema del estudio del ∢ exterior

$\Delta ACD: m+n=\beta$ ... (I)

$\Delta ABC: x-m+y-n=\theta$ ... (II)

- Sumando (I) y (II): $x+y=\theta+\beta$

Método II

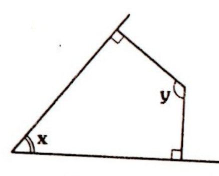


- Por M (que se ubica en la prolongación de $\overline{AB}$), se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overleftrightarrow{AD}$.
- Por $\measuredangle_s$ alternos internos: $m\measuredangle AMS=x$
- Por teorema de ángulos entre paralelas:

$x+y=\theta+\beta$

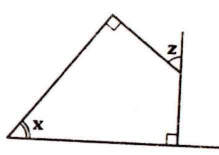
Corolario 1:

Del gráfico anterior, si $\theta=\beta=90°$, la nueva figura quedará así:



Se cumple: $x+y=180°$

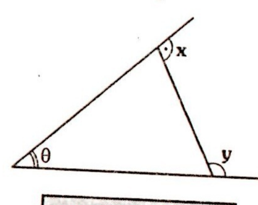
Corolario 2:



Se cumple: $x=z$

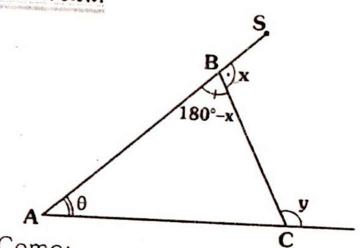
TEOREMA 7

En el gráfico, se cumple:



$x+y=180°+\theta$

Demostración:



- Como:

$m\measuredangle SBC=x \Rightarrow m\measuredangle ABC=180°-x$

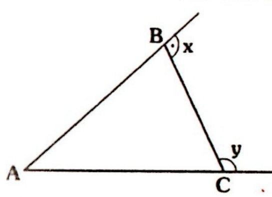
- Por teorema del cálculo del ∢ exterior:

$y=\theta+180°-x$

$\therefore x+y=180°+\theta$

Corolario:

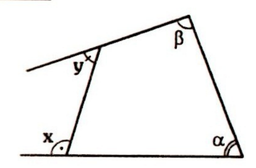
De lo anterior se deduce que la suma de medidas de dos ángulos exteriores (uno por vértice) es mayor a 180°, y considerando el corolario del teorema 3.



En el gráfico, se cumple:

$180°<x+y<360°$

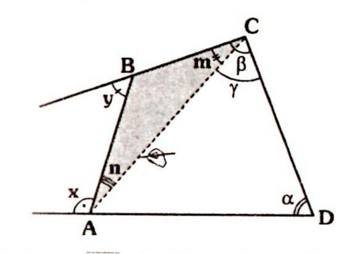
TEOREMA 8



En el gráfico, se cumple:

$x+y=\alpha+\beta$

Demostración:



- Se traza $\overline{AC}$, luego se tiene: $\beta=m+\gamma$
- Por cálculo del ángulo exterior en:

$\Delta ABC: y=n+m$ ... (I)

$\Delta ACD: x+n=\alpha+\gamma$ ... (II)

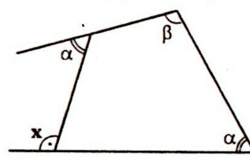
- Sumando (I) y (II):

$x+\cancel{n}+y=\cancel{n}+\alpha+\underbrace{(m+\gamma)}_{\beta}$

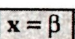
$\therefore x+y=\alpha+\beta$

Corolario:

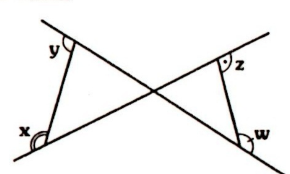
Del gráfico anterior, si $\alpha=y$



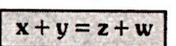
Se cumple:


$x=\beta$

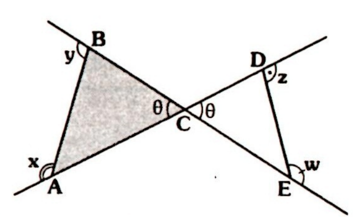
TEOREMA 9



En el gráfico, se cumple:


$x+y=z+w$

Demostración



- Por teorema 7, en:

$\Delta ABC: x+y=180°+\theta$

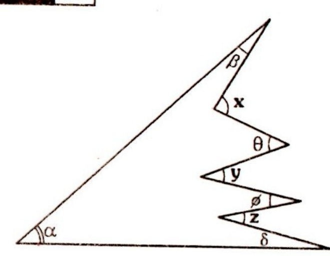
$\Delta DCE: z+w=180°+\theta$

$\therefore x+y=z+w$

GENERALIZACIÓN DE ALGUNOS TEOREMAS

Los siguientes teoremas que se indicarán, se desprenden de los teoremas 4, 5 y 6.

TEOREMA 10

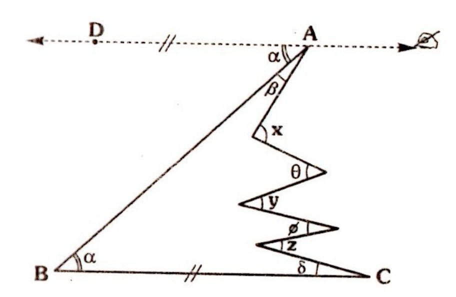


En el gráfico, se cumple:

$$x+y+z=\alpha+\beta+\theta+\phi+\delta$$

Demostración

Para realizar esta demostración se podría pensar en buscar las figuras indicadas en los teoremas 4 ó 6. Pero optaremos por la siguiente.



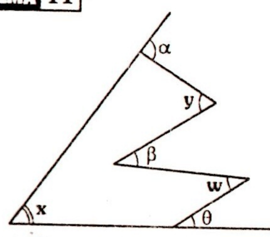
- Se traza por A, la recta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$. Por ángulos alternos internos:

$$m\measuredangle BAD=\alpha$$

- Por teorema de ángulos entre paralelas:

$$\therefore\ x+y+z=\alpha+\beta+\theta+\phi+\delta$$

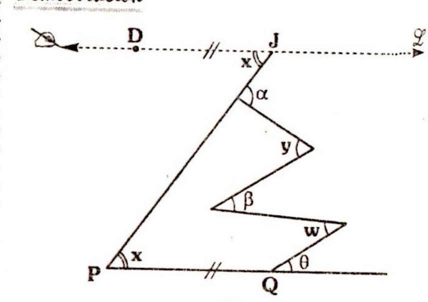
TEOREMA 11



En el gráfico, se cumple:

$$x+y+w=\alpha+\beta+\theta$$

Demostración



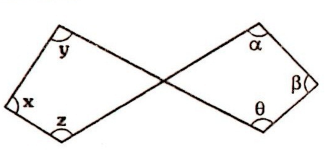
- Por J, se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}\ //\ \overleftrightarrow{PQ}$.
- Por ángulos alternos internos, se cumple:

$$m\measuredangle DJP=x$$

- Por teorema de ángulos entre paralelas:

$$\therefore\ x+y+w=\alpha+\beta+\theta$$

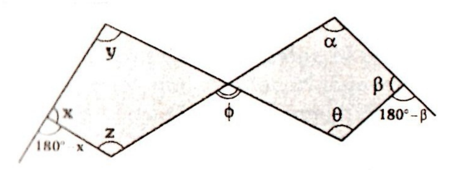
TEOREMA 12



En el gráfico, se cumple:

$$x+y+z=\alpha+\beta+\theta$$

Demostración



En cada una de las regiones sombreadas, por teorema 6.

- $y+z=\phi+180°-x$

$\Rightarrow y+z+x=\phi+180°$ ... (I)

- $\alpha+\theta=\phi+180°-\beta$

$\Rightarrow \alpha+\theta+\beta=\phi+180°$ ... (II)

De (I) y (II): $x+y+z=\alpha+\theta+\beta$

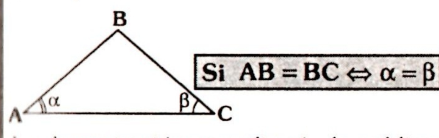
TEOREMA DE LA CORRESPONDENCIA Y EXISTENCIA

Nota

En esta publicación usaremos el siguiente teorema (sin demostración)

TEOREMA 13

"Si un triángulo tiene dos lados de igual longitud, entonces los ángulos opuestos a dichos lados tienen igual medida y recíprocamente".

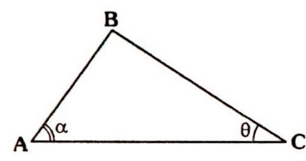


$$\text{Si } AB=BC \Leftrightarrow \alpha=\beta$$

La demostración se realizará la publicación de congruencia de triángulos.

TEOREMA 14 *(teorema de la correspondencia)*

En todo triángulo al lado de mayor longitud se opone el ángulo de mayor medida y recíprocamente.



En el gráfico:

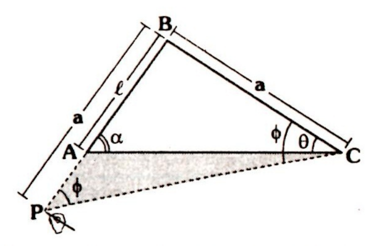
$$\text{Si } BC>AB \Leftrightarrow \alpha>\theta$$

Demostración:

Debido al carácter recíproco la demostración constará de dos partes:

Parte I

- Si $BC>AB \Rightarrow \alpha>\theta$



- Como por condición $BC>AB$, es decir $a>\ell$, se prolonga $\overline{BA}$ hasta P, tal que $PB=a$.
- En ΔPBC, como $PB=BC$, por teorema 13:

$$m\measuredangle BPC=m\measuredangle BCP=\phi$$

- Con lo cual tendremos:

$\phi\ >\ \theta$ ... (I)

- En ΔAPC por corolario del teorema del $\measuredangle$ exterior:

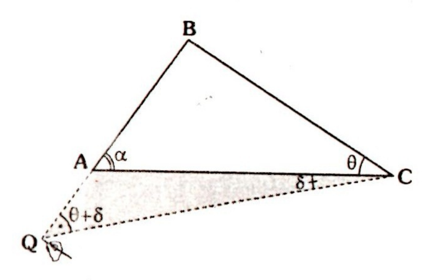
$\alpha>\phi$ ... (II)

- De (II) y (I):

$$\alpha > \phi \text{ y } \phi > \theta \Rightarrow \alpha > \theta$$

Parte II (⇐)

- Si $\alpha > \theta \Rightarrow BC > AB$



- Como $\alpha > \theta \Rightarrow \alpha = \theta + 2\delta$
(Se ha considerado convenientemente 2δ)
- Se prolonga $\overline{BA}$ hasta Q, tal que $m\sphericalangle ACQ = \delta$
- En ΔAQC, por ángulo exterior:

$$\alpha = \delta + m\sphericalangle AQC$$

$$\theta + 2\delta = \delta + m\sphericalangle AQC$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle AQC = \theta + \delta$$

- Como:

$$m\sphericalangle BQC = m\sphericalangle ACB = \theta + \delta$$

- Por teorema 13:

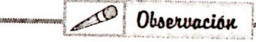
$$QB = BC$$

- Pero:

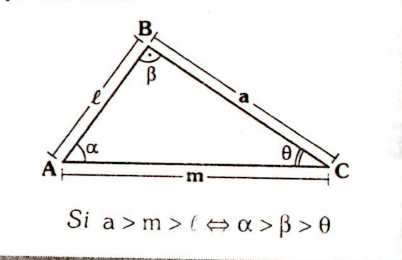
$$QB = QA + AB$$

$$\Rightarrow BC = QA + AB$$

$$\therefore BC > AB$$



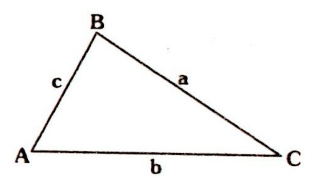
Con lo anterior queda probado que a mayor "lado", se opone mayor "ángulo", para los tres lados y ángulos quedará asi:



Si $a > m > \ell \Leftrightarrow \alpha > \beta > \theta$

TEOREMA 15

En todo triángulo la longitud de cualquier lado es menor que la suma de longitudes de los otros dos lados.

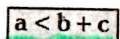


En el gráfico, se cumple:

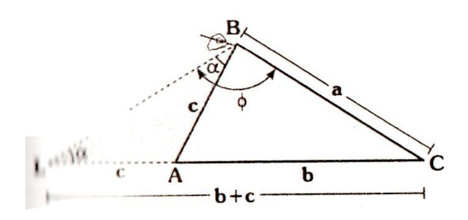
$$\boxed{a < b + c}$$

$$\boxed{b < a + c}$$

$$\boxed{c < a + b}$$



- Será suficiente demostrar para uno de los lados, ya que en forma análoga se demostrará para los otros dos.



- Se prolonga $\overline{CA}$ hasta L, tal que $AL = c$, entonces $LC = b + c$
- Como:

$$AL = AB \Rightarrow m\sphericalangle ALB = m\sphericalangle ABL = \alpha$$

- En ΔLBC, se tiene:

$$\phi > \alpha$$

- Por teorema de la correspondencia:

$$b + c > a$$

$$\Rightarrow \quad a < b + c$$

- Con el mismo criterio se prueba:

$$b < a + c \quad \text{y}$$

$$c < a + b$$

- De donde se tiene:

$$b - c < a \quad \text{y}$$

$$c - b < a$$

- Es decir:

$$|b - c| < a$$

Nota

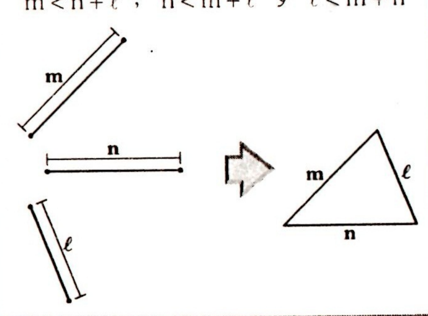
- *En la resolución de ejercicios se suele plantear para uno de los lados por ejemplo, el lado que mide a:*

$$|b - c| < a < b + c$$

Cuando se conozca la relación de orden entre b y c se puede obviar el valor absoluto, planteando la diferencia del mayor con el menor.

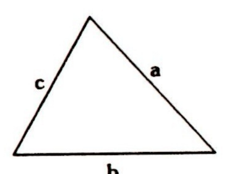
- *Dados tres segmentos de longitudes m, n y ℓ, para que se pueda formar con ellos en triángulo, deben cumplir:*

$$m < n + \ell \;,\quad n < m + \ell \quad \text{y} \quad \ell < m + n$$



Corolario

Del teorema de existencia se deduce:



$$\boxed{a < p} \quad \boxed{b < p} \quad \boxed{c < p}$$

Donde: $p = \dfrac{a + b + c}{2}$

Prueba: $a < b + c \Rightarrow 2a < \underbrace{a + b + c}_{2p}$

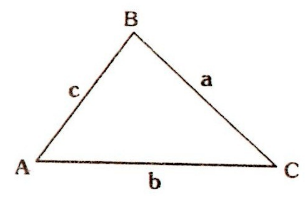
$$\Rightarrow \boxed{a < p}$$

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

SEGÚN LAS LONGITUDES DE SUS LADOS

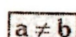
TRIÁNGULO ESCALENO

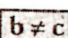
Es aquel triángulo que tiene todos sus lados de diferente longitud.



En el gráfico, si el $\triangle ABC$ es escaleno se cumple:

$a \neq b$

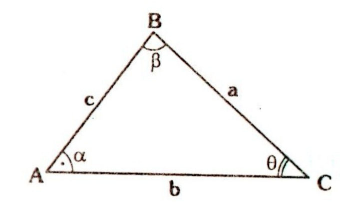

$b \neq c$


$c \neq a$

TEOREMA 16

Las medidas de los ángulos interiores en un triángulo escaleno son todas diferentes.

Demostración



- Como el $\triangle ABC$ es escaleno, sus lados son todos diferentes, supongamos que estén ordenados así:

$$a > b > c$$

- Por teorema de la correspondencia:

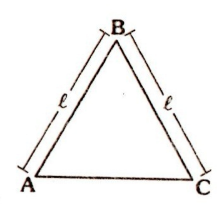
$$\alpha > \beta > \theta$$

- Es decir:

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \theta \ \text{ y } \ \alpha \neq \theta$$

TRIÁNGULO ISÓSCELES

Es aquel triángulo que tiene dos lados de igual longitud, al tercer lado se le denomina base.

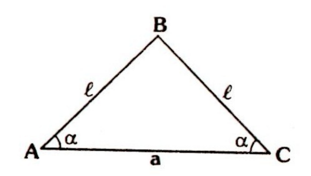


- En el gráfico, el $\triangle ABC$ es isósceles de base AC, se cumple:

$$AB = BC$$

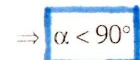
TEOREMA 17

Los ángulos determinados por la base con cada uno de los otros lados son agudos.



- Por teorema 13
- Como $AB = BC \Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle BCA$
- Por corolario del teorema 1:

$$\alpha + \alpha < 180°$$

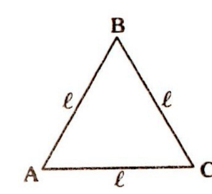

$$\Rightarrow \alpha < 90°$$

- Es decir: $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle BCA$ son agudos
- Además, por teorema de existencia

$$a < 2\ell$$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO

Es aquel triángulo que tiene todos sus lados de igual longitud. También se le llama triángulo regular.



- En el gráfico, si el triángulo es equilátero se cumple:

$$AB = BC = AC$$

TEOREMA 18

Los ángulos interiores de un triángulo equilátero miden 60°.

La demostración es aplicación directa del teorema 13 y 1.

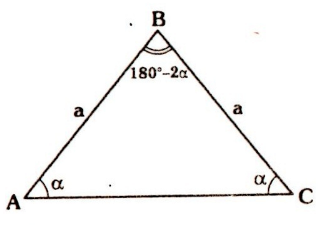
Observaciones

- *Si se conoce la medida de uno de los ángulos en un triángulo isósceles se pueden calcular los otros dos.*

Si $AB = BC$ *y* $m\measuredangle BAC = \alpha$

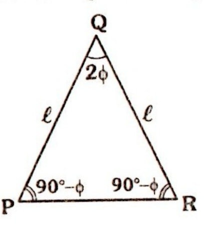
Se cumple: $m\measuredangle ACB = \alpha$

$$m\measuredangle ABC = 180° - 2\alpha$$



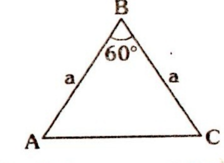
Si $PQ = QR$ *y* $m\measuredangle PQR = 2\phi$

Se cumple: $m\measuredangle QPR = m\measuredangle QRP = 90° - \phi$



- *Si en un triángulo tiene dos lados de igual longitud y un ángulo interior mide 60°, entonces el triángulo es equilátero. Se presentan dos casos:*

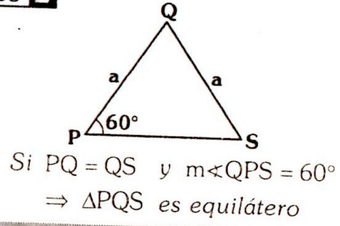
Caso 1



Si $AB = BC$ *y* $m\measuredangle ABC = 60°$

$\Rightarrow \triangle ABC$ *es equilátero*

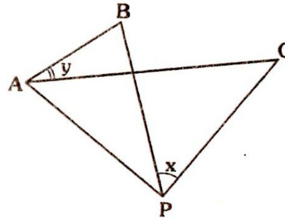
Caso 2



Si PQ = QS *y* m∢QPS = 60°

⇒ ΔPQS *es equilátero*

- Esta última observación lo encontraremos en muchos ejercicios, en el capítulo de puntos notables se estudia con más detalle, aquí lo analizaremos desde el tema de triángulos.

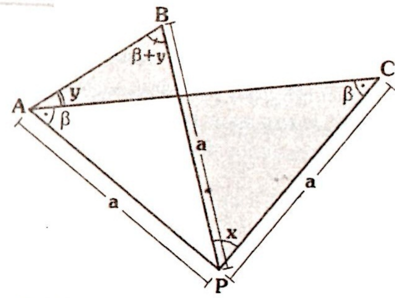


Si PA = PB = PC

Se cumple:

x = 2y

Prueba:

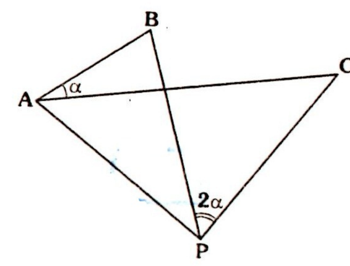


ΔPAC y ΔPAB : isósceles en la región sombreada.

$x + \beta = \beta + 2y$

$\therefore x = 2y$

- Recíproco



Si: PB = PC y

m∢BPC = 2(m∢BAC)

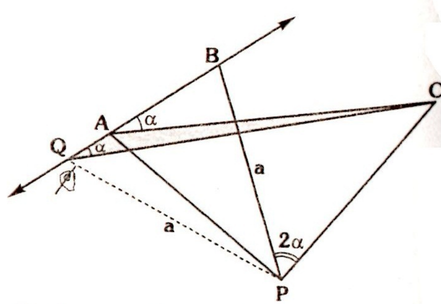
Se cumple: **PA = PB**

Prueba:

- Para prueba usaremos el método del absurdo. Desde P se traza $\overline{PQ}$ tal que PQ = PB , donde Q ∈ $\overline{AB}$ para Q hay dos posibilidades

Q = A o Q ≠ A

Si Q ≠ A , se tiene:



Por lo anterior: m∢CQA = α

Se tiene: m∢CQA = m∢CAB , lo cual es absurdo.

Otra posibilidad es que Q esté entre A y B, lo cual en forma análoga de deduce que es absurdo.

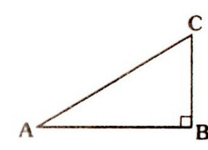
Entonces la única posibilidad es:

Q = A

POR LAS MEDIDAS ANGULARES

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Es aquel triángulo en el que un ángulo interior mide 90°.



- En el gráfico:

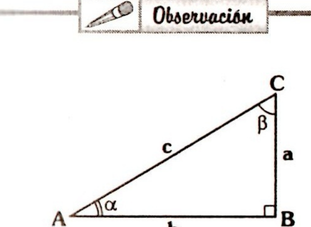
m∢ABC = 90°

Entonces el triángulo ABC es un triángulo rectángulo.

Catetos: $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$

Hipotenusa: $\overline{AC}$

Observación



En el gráfico se cumple:

Por teorema 1:

$\alpha + \beta + 90° = 180°$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 90°$

$\Rightarrow \alpha < 90°$ y $\beta < 90°$

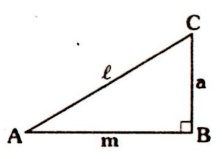
Por teorema de la correspondencia:

c > a y **c > b**

Nota

Un segundo y último teorema que utilizaremos sin demostración (ella se realizará en el tema de relaciones métricas) es el siguiente.

TEOREMA 19 (Teorema de Pitágoras)



En el gráfico, se cumple:

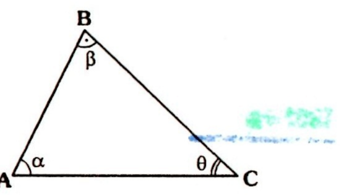
$$a^2 + m^2 = \ell^2$$

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Es aquel triángulo en el que ningún ángulo interior mide 90°. Debido a está característica, pueden ser:

a. TRIÁNGULO ACUTÁNGULO

Es aquel triángulo en el que las medidas de sus ángulos interiores son menores a 90°.



- Si ΔABC es acutángulo, se cumple:

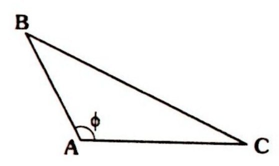
α < 90°

θ < 90°

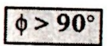
β < 90°

b. TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO

Es aquel triángulo en el que uno de sus ángulos interiores mide más de 90°.

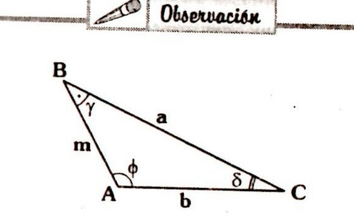


- En el gráfico, si el ΔABC es obtusángulo (obtuso en A), se cumple:



$$\phi > 90°$$

Observación

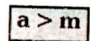


En el gráfico si: $\phi > 90°$

$\Rightarrow \gamma + \delta < 90°$

$\Rightarrow \gamma < 90°$ y $\delta < 90°$

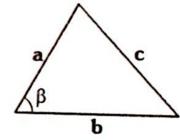
Por teorema de la correspondencia:



$$a > m$$

$$a > b$$

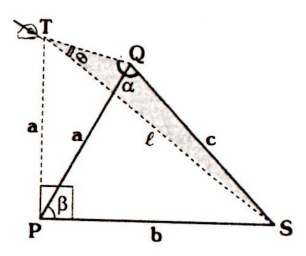
TEOREMA 20



En el gráfico, se cumple:

$$\textbf{Si: } \beta < 90° \Rightarrow c^2 < a^2 + b^2$$

Demostración



- Se traza $\overline{PT} \perp PS$ tal que $PT = a$ y como $\beta < 90°$, $\overline{PQ}$ estará en la parte interna del $\measuredangle TPS$.
- ΔPTQ : isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle QTP = m\measuredangle TPQ$ ... (I)

- $⊿TPS$: $\ell^2 = a^2 + b^2$ *(T. pitágoras)*
- ΔTQS : se tendrá: $\alpha > m\measuredangle TQP$

$m\measuredangle PTQ > \theta$

- Por (I), se tendrá $\alpha > \theta$
- Por teorema de la correspondencia

Como: $\alpha > \theta \Rightarrow \ell > c$

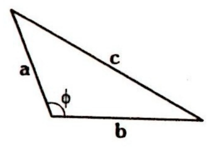
$\Rightarrow \ell^2 > c^2$

- Pero en $⊿TPS$: $\ell^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 > c^2$

$\therefore c^2 < a^2 + b^2$

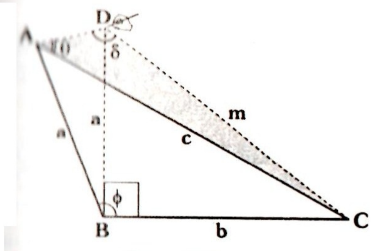
TEOREMA 21



En el gráfico, se cumple:

$$\textbf{Si } \phi > 90° \Rightarrow c^2 > a^2 + b^2$$

Demostración:



- Se traza $\overline{BD} \perp \overline{BC}$ tal que $BD = a$, como $\phi > 90°$, $\overline{BD}$ cortará a $\overline{AC}$.
- Como $BD = BA \Rightarrow \Delta ABD$ es isósceles: $m\measuredangle BAD = m\measuredangle ADB$
- En $⊿DBC$: $m^2 = a^2 + b^2$
- En ΔADC: $\delta > m\measuredangle ADB$

$m\measuredangle BAD > \theta \Rightarrow \delta > \theta$

- Por t. de la correspondencia en ΔADC:

Como $\delta > \theta \Rightarrow c > m$

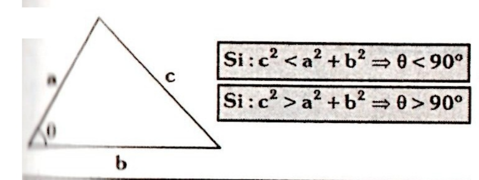
$\Rightarrow c^2 > m^2$

- Pero en $⊿DBC$: $\mathbf{m^2} = a^2 + b^2$

$\Rightarrow c^2 > a^2 + b^2$

TEOREMA 22

Consideramos los recíprocos (4) de los dos últimos teoremas.



$$\textbf{Si : } c^2 < a^2 + b^2 \Rightarrow \theta < 90°$$

$$\textbf{Si : } c^2 > a^2 + b^2 \Rightarrow \theta > 90°$$

(4) ver anexos: métodos de demostración.

Demostración

- Para realizar la demostración de estos dos teoremas, usaremos el método de reducción al absurdo. Sólo demostraremos el primer teorema, el segundo es análogo.
- Supongamos que no se cumple $\theta < 90°$ con lo cual tendremos:

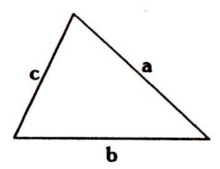
$\theta = 90°$ ó $\theta > 90°$

- Si $\theta = 90° \Rightarrow$ por teorema 19 $a^2 + b^2 = c^2$, contradice la condición.
- Si $\theta > 90° \Rightarrow$ por teorema 21 $c^2 > a^2 + b^2$, también contradice la condición.

$\therefore$ Se concluye que $\theta < 90°$



Con los últimos teoremas demostrados podremos reconocer la ***naturaleza del triángulo*** *a partir de sus lados.*



Si: $a > b$ y $a > c$

Si: $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ *es un triángulo rectángulo*

Si: $a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ *es un triángulo acutángulo*

Si: $a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ *es un triángulo obtusángulo*

LÍNEAS NOTABLES ASOCIADAS AL TRIÁNGULO

DEFINICIÓN

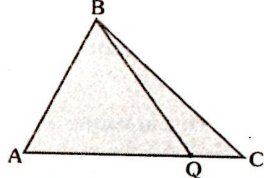
Son segmentos o rectas (en algunos casos rayos) que se relacionan con los lados o con los ángulos en el triángulo. Las más comunes son:

CEVIANA

Es un segmento de recta que tiene como extremos: un vértice del triángulo y el otro es un punto de la recta que contiene al lado opuesto.

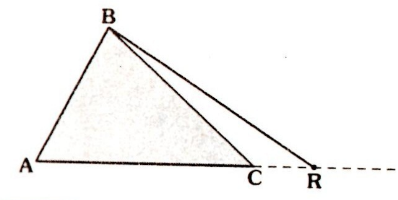
- En el gráfico, para ΔABC

  $\overline{BQ}$: ceviana interior



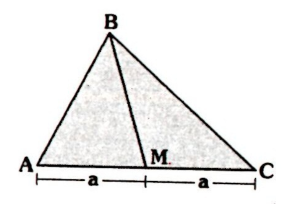
- En el gráfico, para el ΔABC :

  $\overline{BR}$: ceviana exterior



MEDIANA

Es aquel segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el otro es el punto medio del lado opuesto.



- En el gráfico:

  $\overline{BM}$ es una mediana, en este gráfico es la mediana relativa a $\overline{BC}$.



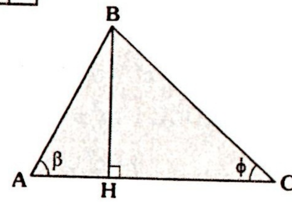
En todo triángulo se pueden trazar tres medianas, una relativa a cada lado.

ALTURA

Es aquel segmento de recta, cuyos extremos son un vértice del triángulo y el otro está en la recta que contiene al lado opuesto, tal que dicho segmento es perpendicular al lado.

Se presentan los siguientes casos:

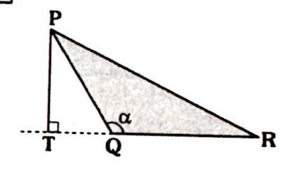
Caso 1



- Si $\beta < 90°$ y $\phi < 90°$
- En el ΔABC :

  $\overline{BH}$: altura relativa a $\overline{AC}$

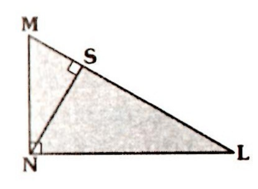
Caso 2



- Si $\alpha > 90°$
- Para el ΔPQR

  $\overline{PT}$: Altura relativa a $\overline{QR}$

Caso 3



- Para el ◺MNL

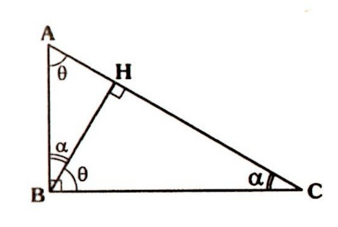
  $\overline{NS}$: altura relativa a $\overline{ML}$

  $\overline{MN}$: altura relativa a $\overline{NL}$

  $\overline{LN}$: altura relativa a $\overline{MN}$

Observación

En un triángulo rectángulo al trazar la altura relativa a la base, se tendrán tres triángulos rectángulos con las mismas medidas angulares.



Se cumple:

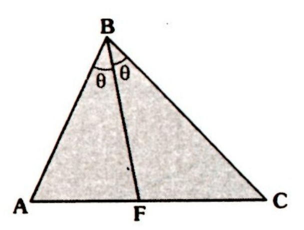
$m\measuredangle HBC = m\measuredangle BAC = \theta$

$m\measuredangle HBA = m\measuredangle BCA = \alpha$

BISECTRIZ

BISECTRIZ INTERIOR

Es aquella ceviana interior que biseca al ángulo interior.

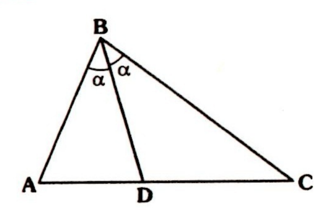


- En el gráfico para el ΔABC como:

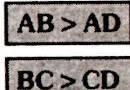
  $m\measuredangle ABF = m\measuredangle FBC$

  $\Rightarrow$ $\overline{BF}$: bisectriz interior relativa a $\overline{AC}$.

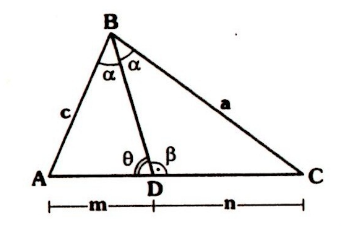
TEOREMA 23



En el gráfico, se cumple:



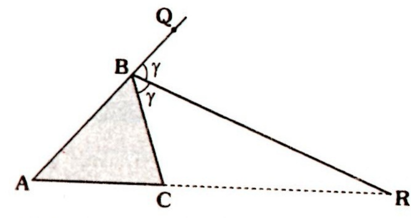
Demostración



- En ΔBDC: $\theta > \alpha$
- Por teorema de la correspondencia en ΔADB: como $\theta > \alpha \Rightarrow c > m$
- En forma análoga: $\beta > \alpha \Rightarrow a > n$

BISECTRIZ EXTERIOR

Es aquella ceviana exterior que biseca al ángulo exterior.



En el gráfico $m\measuredangle CBR = m\measuredangle RBQ$

$\Rightarrow$ $\overline{BR}$ es bisectriz exterior relativa a $\overline{AC}$.

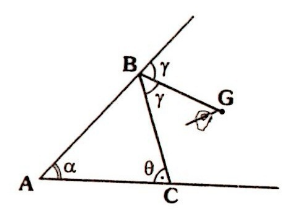
TEOREMA 24

Si dos lados son de diferente longitud, la bisectriz exterior relativa al tercer lado se ubicará en la región exterior relativa al menor de dichos lados y recíprocamente.

Demostración

La demostración consta de dos partes, debido al carácter recíproco.

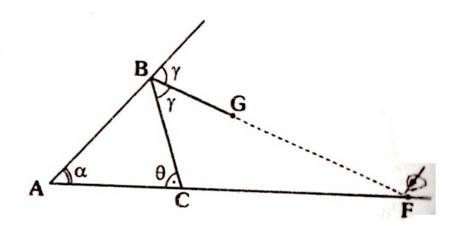
Parte I



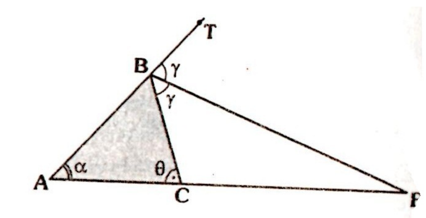
- En el gráfico $AB > BC$, vamos a probar que la prolongación de $\overline{BG}$ corta a la prolongación de $\overline{AC}$. Para ello será suficiente probar: $\theta > \gamma$.

- Por $\measuredangle$ exterior: $2\gamma = \alpha + \theta$ ... (I)
- Como: $AB > BC \Rightarrow \theta > \alpha$

  $\Rightarrow \theta + \theta > \alpha + \theta$ ... (II)
- De (I) y (II): $2\theta > 2\gamma \Rightarrow \theta > \gamma$
- Como $\theta > \alpha$, las prolongaciones de $\overline{BG}$ y $\overline{AC}$ se cortan.



Parte II



- En el gráfico, vamos a demostra[r] $AB > BC$
- En ΔABF: $m\measuredangle FBT > \alpha$

  Es decir: $\gamma > \alpha$ ... (I)
- En ΔCBF: $\theta > m\measuredangle CBF$

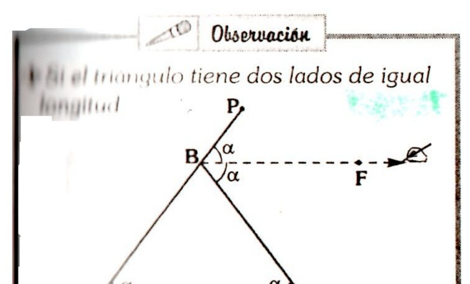
  Es decir: $\theta > \gamma$ ... (II)
- De (II) y (I): $\theta > \gamma > \alpha$

  $\Rightarrow \theta > \alpha$
- En ΔABC por teorema de la correspondencia.

  Como: $\theta > \alpha \Rightarrow AB > BC$

Observación

- *Si el triángulo tiene dos lados de igual longitud*

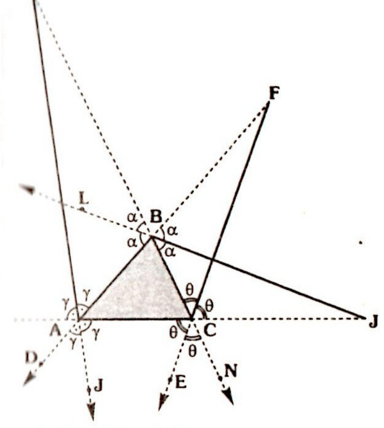


Si $AB = BC \Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle ACB$ *al bisecar el ángulo exterior notamos que* $\overline{BF} // \overline{AC}$.

En este caso diremos que el rayo BF es bisectriz del ángulo PBC.

- *En un triángulo escaleno observaremos las tres bisectrices exteriores.*

En el gráfico, sea el ΔABC *escaleno.*



Sea $AC > AB > BC$

$\Rightarrow$ $\overline{BJ}$, $\overline{CF}$ *y* $\overline{AH}$ *son bisectrices exteriores para el* ΔABC.

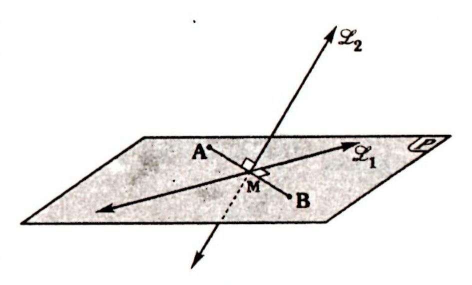
- $\overrightarrow{AJ}$ *es bisectriz del ángulo* DAC.
- $\overrightarrow{CE}$ *es bisectriz del ángulo* ACN.
- $\overrightarrow{BL}$ *es bisectriz del ángulo* ABH.

MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

La mediatriz de un segmento, es la recta perpendicular en su punto medio.

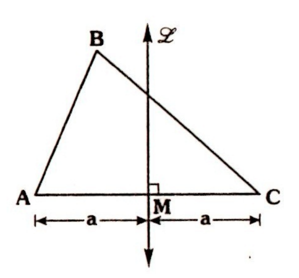
Si consideramos un triángulo, la mediatriz de un lado es la recta copla-nar al triángulo y perpendicular en su punto medio.

- Consideremos el segmento (gráfico espacial).



Si $AM = MB$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \perp \overline{AB}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \perp \overline{AB}$ ($M \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $M \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$), se tendrá $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son mediatrices de $\overline{AB}$.

- Si consideramos el plano que determina el triángulo ABC.



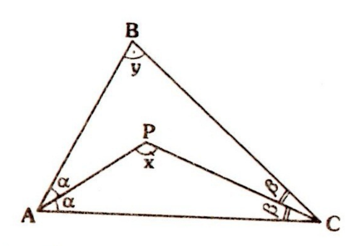
Si: $AM = MC$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overline{AC}$

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.

ÁNGULO ENTRE BISECTRICES

TEOREMA 25

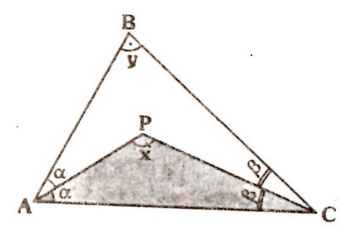


En el gráfico, se cumple:



$$x = 90° + \frac{y}{2}$$

Demostración



- En $\triangle ABC$:

$$x + \alpha + \beta = 180° \quad \ldots (I)$$

- En ⩓ABCP:

$$x = \alpha + \beta + y \quad \ldots (II)$$

- Sumando las ecuaciones (I) y (II):

$$2x + \cancel{\alpha + \beta} = 180° + \cancel{\alpha + \beta} + y$$

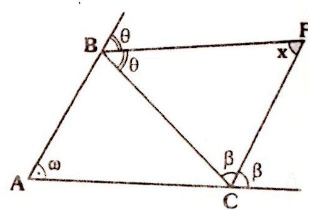
$$2x = 180° + y$$

$$\therefore\ x = 90° + \frac{y}{2}$$

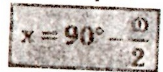
- Además:

como $x > 90° \Rightarrow \triangle APC$ es obtusángulo.

TEOREMA 26

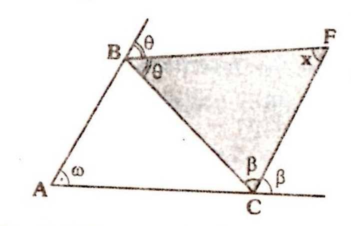


En el gráfico, se cumple:



$$x = 90° - \frac{\omega}{2}$$

Demostración



- En $\triangle BFC$: $\quad x + \theta + \beta = 180° \quad \ldots (I)$
- En ⊿, por teorema 6:

$$x + \omega = \theta + \beta \quad \ldots (II)$$

- Sumando (I) y (II):

$$2x + \cancel{\theta + \beta} + \omega = 180° + \cancel{\theta + \beta}$$

$$\Rightarrow 2x + \omega = 180°$$

$$\therefore\ x = 90° - \frac{\omega}{2}$$

- Además:

Del último resultado: $x < 90°$

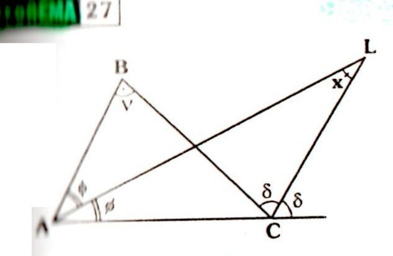
Como $2\theta < 180° \Rightarrow \theta < 90°$

$2\beta < 180° \Rightarrow \beta < 90°$

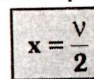
Se puede asegurar:

$\triangle BFC$: acutángulo

TEOREMA 27

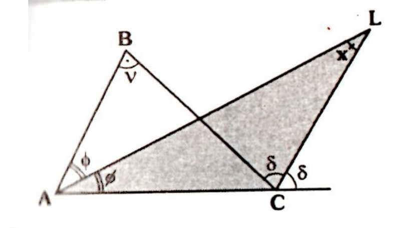


En el gráfico, se cumple:



$$x = \frac{v}{2}$$

Demostración



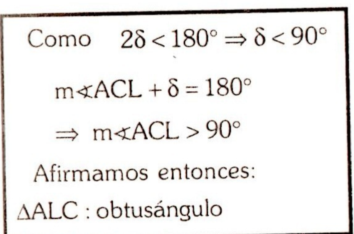
- En $\triangle ALC$: $\quad x + \phi = \delta \quad \ldots (I)$
- En ⋈ : $\quad x + \delta = v + \phi \quad \ldots (II)$
- Sumando (I) y (II):

$$2x + \cancel{\phi + \delta} = v + \cancel{\phi + \delta}$$

$$2x = v$$

$$\therefore\ x = \frac{v}{2}$$

- Además:



Como $2\delta < 180° \Rightarrow \delta < 90°$

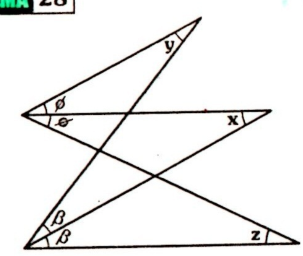
$m\sphericalangle ACL + \delta = 180°$

$\Rightarrow m\sphericalangle ACL > 90°$

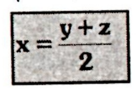
Afirmamos entonces:

$\triangle ALC$: obtusángulo

TEOREMA 28

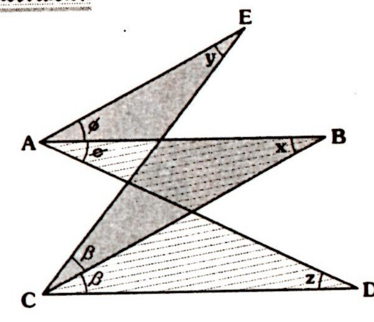


En el gráfico, se cumple:



$$x = \frac{y + z}{2}$$

Demostración



- Por teorema 5

En A⟋B (E, C): $\quad x + \beta = y + \phi \quad \ldots (I)$

En ⋈ (A, B, C, D): $\quad x + \phi = z + \beta \quad \ldots (II)$

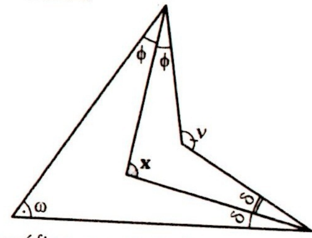
- Sumando (I) y (II):

$$2x + \cancel{\beta + \phi} = y + z + \cancel{\beta + \phi}$$

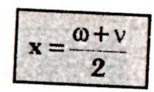
$$2x = y + z$$

$$\therefore\ x = \frac{y + z}{2}$$

TEOREMA 29

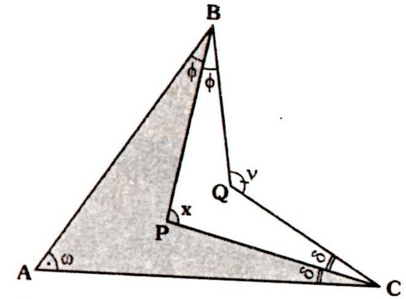


En el gráfico, se cumple:



$$x = \frac{\omega + \nu}{2}$$

Demostración



- Por el teorema 4

En: $x = \omega + \phi + \delta$ ... (I)

En: $x + \phi + \delta = \nu$ ... (II)

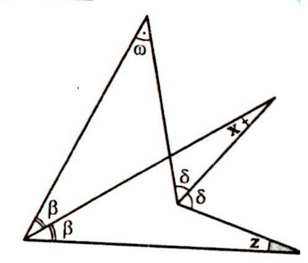
- Sumando (I) y (II):

$$2x + \cancel{\phi + \delta} = \omega + \nu + \cancel{\phi + \delta}$$

$$\Rightarrow 2x = \omega + \nu$$

$$\therefore\ x = \frac{\omega + \nu}{2}$$

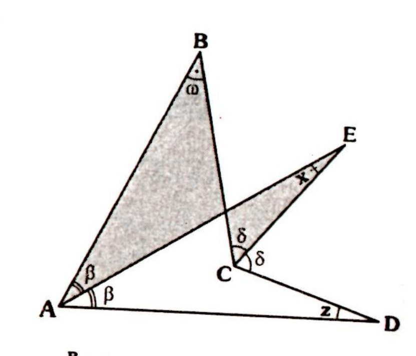
TEOREMA 30



En el gráfico, se cumple:

$$x = \frac{\omega - z}{2}$$

Demostración



En: $x + \delta = \omega + \beta$ ... (I)

En: $x + \beta + z = \delta$ ... (II)

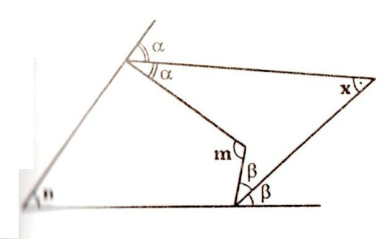
- Sumando (I) y (II):

$$2x + \cancel{\delta + \beta} + z = \omega + \cancel{\delta + \beta}$$

$$\Rightarrow 2x + z = \omega$$

$$\therefore\ x = \frac{\omega - z}{2}$$

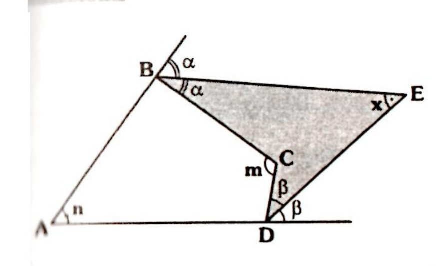
TEOREMA 31



En el gráfico, se cumple:

$$x = \frac{m - n}{2}$$

Demostración



En: $x + \alpha + \beta = m$ ... (I)

En: $x + n = \alpha + \beta$ ... (II)

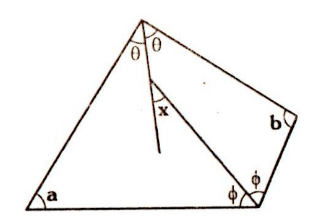
- Sumando (I) y (II):

$$2x + \cancel{\alpha + \beta} + n = m + \cancel{\alpha + \beta}$$

$$2x + n = m$$

$$\therefore\ x = \frac{m - n}{2}$$

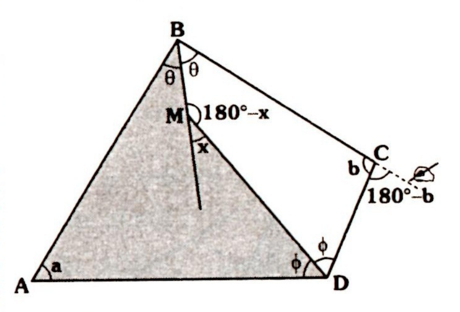
TEOREMA 32



En el gráfico, se cumple:

$$x = \frac{b - a}{2}$$

Demostración



En: $a + \theta + \phi = 180° - x$ ... (I)

En: $x + 180° - b = \theta + \phi$ ... (II)

- Sumando (I) y (II):

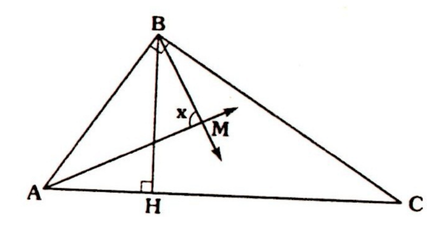
$$a + \cancel{\theta + \phi} + x + 180° - b = 180° - x + \cancel{\theta + \phi}$$

$$\Rightarrow a + x - b = -x$$

$$\Rightarrow 2x = b - a$$

$$\therefore\ x = \frac{b - a}{2}$$

TEOREMA 33

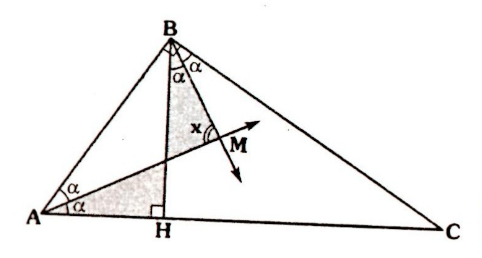


En el gráfico, $\overline{AM}$ y $\overline{BM}$ son bisectrices de los ángulos BAC y HBC respectivamente.

Se cumple:

$$x = 90°$$

Demostración:



- Por la observación en el ◺, se tiene

$$m\angle BAC = m\angle HBC = 2\alpha$$

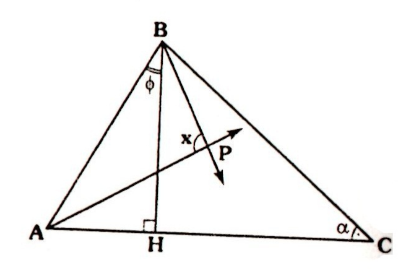
- En ◺ABM (A, H, M, B):

$$x + \not{\alpha} = 90° + \not{\alpha}$$

$$\therefore\ x = 90°$$

TEOREMA 34

El siguiente teorema es una generalización del anterior.

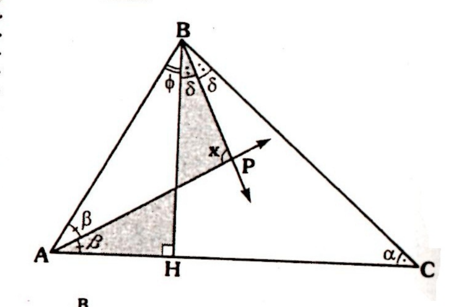


En el gráfico $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{BP}$ son bisectrices de los ángulos BAC y HBC respectivamente.

Se cumplen:

$$x = 90° + \left(\frac{\alpha - \phi}{2}\right)$$

Demostración:



En ◺ (B, P, A, H) : $x + \delta = 90° + \beta$

$$\Rightarrow\ x = 90° + (\beta - \delta) \quad \dots (I)$$

En ◺AHB y BHC:

$$\phi + 2\beta = 90° \quad \dots (II)$$

$$\alpha + 2\delta = 90° \quad \dots (III)$$

- De (II) y (III):

$$\phi + 2\beta = \alpha + 2\delta$$

$$2\beta - 2\delta = \alpha - \phi$$

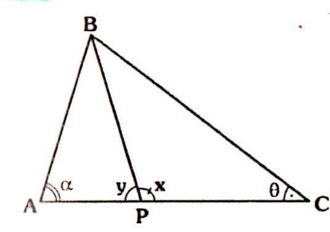
$$\beta - \delta = \frac{\alpha - \phi}{2}$$

- En (I): $\quad x = 90° + \left(\frac{\alpha - \phi}{2}\right)$

Nota

Si $\alpha = \phi$, entonces el triángulo ABC es triángulo rectángulo.

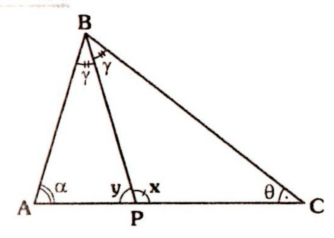
TEOREMA 35



En el gráfico, $\overline{BP}$ es bisectriz interior, se cumple:

$$x - y = \alpha - \theta$$

Demostración



- Por ∢ exterior:

En ΔABP: $\quad x = \alpha + \gamma \quad \dots (I)$

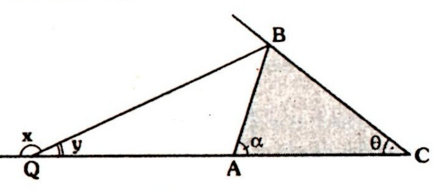
En ΔPBC: $\quad y = \theta + \gamma \quad \dots (II)$

- Restando (I) y (II):

$$x - y = (\alpha + \gamma) - (\theta + \gamma)$$

$$\therefore\ x - y = \alpha - \theta$$

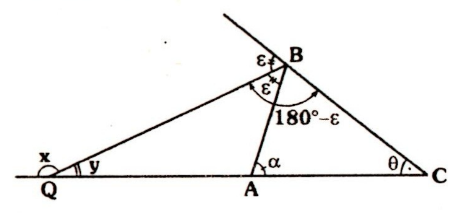
TEOREMA 36



En el gráfico, $\overline{BQ}$ es bisectriz exterior para el ΔABC, se cumple:

$$x - y = 180° - (\alpha - \theta)$$

Demostración



- Por ∢ exterior

En ΔQBC: $\quad x = 180° - \varepsilon + \theta \quad \dots (I)$

En ΔQBA: $\quad y + \varepsilon = \alpha \quad \dots (II)$

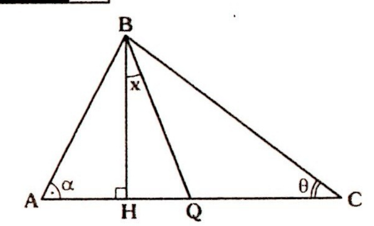
- Restando (I) y (II):

$$x - (y + \varepsilon) = 180° - \varepsilon + \theta - \alpha$$

$$x - y - \not{\varepsilon} = 180° - \not{\varepsilon} - (\theta - \alpha)$$

$$\therefore\ x - y = 180° - (\theta - \alpha)$$

TEOREMA 37

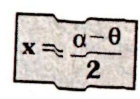


En el gráfico para el $\triangle ABC$

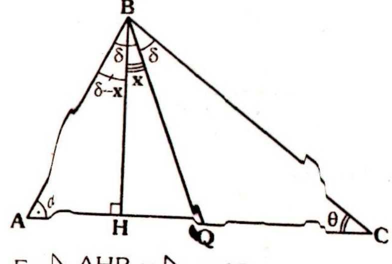
- $\overline{BH}$: Altura
- $\overline{BQ}$: Bisectriz interior

Si cumple:

$$x = \frac{\alpha - \theta}{2}$$



Demostración



- En $\triangle$ AHB y $\triangle$ BHC:

$$\alpha + \delta - x = 90° \quad \dots (I)$$

$$\alpha + \delta + \theta = 90° \quad \dots (II)$$

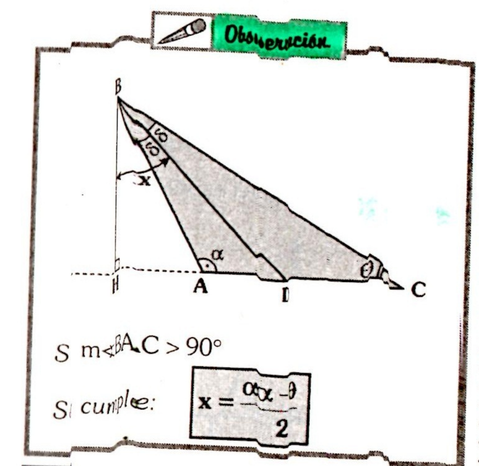
- De (I) y (II):

$$x + \delta + \theta = \alpha + \delta - x$$

$$\Rightarrow 2x = \alpha - \theta$$

$$\therefore x = \frac{\alpha - \theta}{2}$$

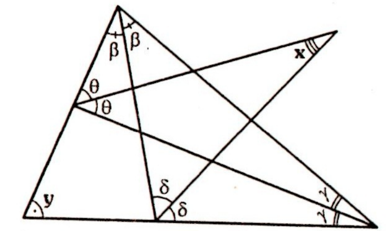
Observación



Si $m\measuredangle BAC > 90°$

Se cumple: $x = \frac{\alpha - \theta}{2}$

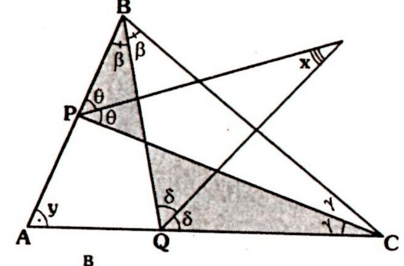
TEOREMA 38



En el gráfico, se cumple:

$$x = 45° - \frac{y}{4}$$

Demostración



- En (triángulo PBQC), por teorema 27

$$x = \frac{\beta + \gamma}{2} \quad \dots (I)$$

- En $\triangle ABC$:

$$2\beta + 2\gamma + y = 180°$$

$$\Rightarrow 2\beta + 2\gamma = 180° - y$$

$$\Rightarrow \beta + \gamma = 90° - \frac{y}{2} \quad \dots (II)$$

- De (II) y (I):

$$x = \frac{1}{2}(90° - \frac{y}{2})$$

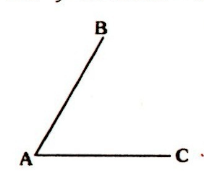
$$\therefore x = 45° - \frac{y}{4}$$

ALGUNOS CRITERIOS PARA REALIZAR TRAZOS AUXILIARES

En la resolución de muchos ejercicios nos encontramos frente a situaciones en las que para su resolución no basta el uso de los teoremas mencionados. Se hace necesario algún trazo auxiliar (como a veces buscar algún triángulo isósceles o equilátero, trazar alguna bisectriz, realizar alguna prolongación, por indicar algunos casos).

En el capítulo de congruencia de triángulo se indicarán otros criterios y teoremas para tal fin. A continuación se consideran algunos criterios, así como reconocer algunos triángulos. El estudiante debe familiarizarse con ellos.

- Si $AB = BC$ y $m\measuredangle BAC = 60°$

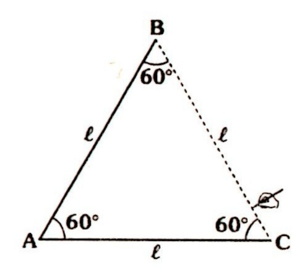


Se te sugiere: trazar $\overline{BC}$, debido a que:

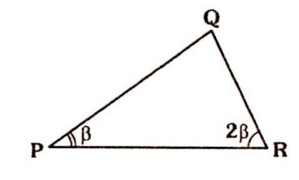
$$m\measuredangle ABC = m\measuredangle ACB = 60°$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ es equilátero

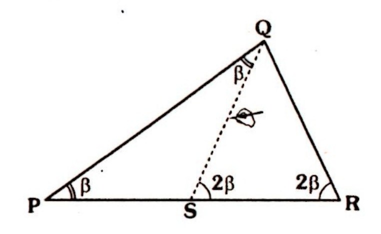
$\Rightarrow BC = \ell$



- En el gráfico, si $m\measuredangle PRQ = 2(m\measuredangle QPR)$



Se te sugiere:

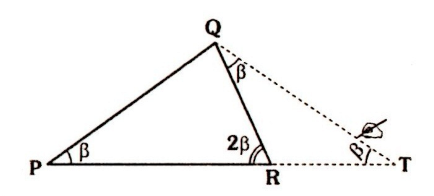


Trazar $\overline{QS}$, tal que $m\measuredangle PQS = \beta$. Con ello se tendrá:

$\triangle PSQ$ y $\triangle SQR$: isósceles

$$\Rightarrow QR = QS = PS$$

Otra posibilidad



Trazar $\overline{QT}$ (*ceviana exterior*), tal que $m\measuredangle PTQ = \beta$, ya que se tendrá:

$$m\measuredangle RQT = \beta$$

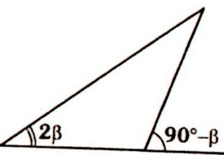
Luego: $\triangle PQT$ y $\triangle RQT$ son isósceles

$$\Rightarrow PQ = QT \text{ y } QR = RT$$

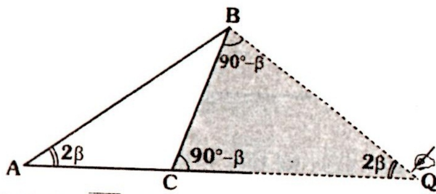
Observación

El primer caso se está considerando $m\sphericalangle PQR > \beta$, si no lo fuera entonces, se recomienda usar el segundo caso.

- En el gráfico:



Se te sugiere:

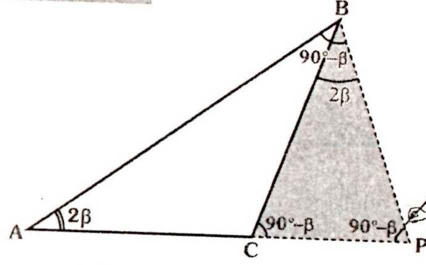


Se traza $\overline{BQ}$ tal que $m\sphericalangle AQB = 2\beta$ con ello se tendrá $m\sphericalangle CBQ = 90° - \beta$, luego:

$$\Delta ABQ \text{ y } \Delta CBQ \text{ son isósceles}$$

$$\Rightarrow AB = BQ = CQ$$

Otra posibilidad



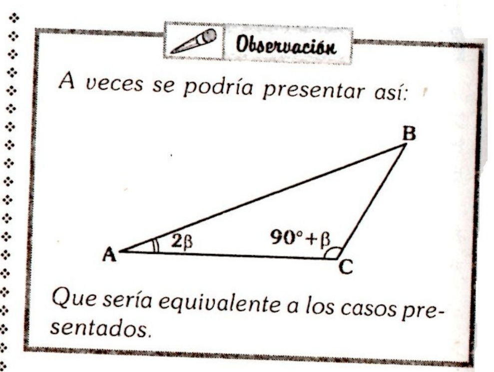
Se traza $\overline{BP}$ tal que $m\sphericalangle APB = 90° - \beta$ con ello se tiene: $m\sphericalangle ABP = 90° - \beta$, luego:

$$\Delta ABP \text{ y } \Delta CBP \text{ son isósceles}$$

$$\Rightarrow AB = AP \text{ y } CB = BP$$

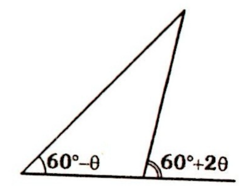
Observación

A veces se podría presentar así:

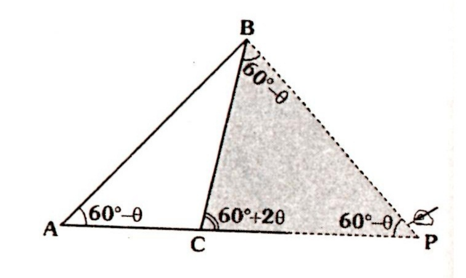


Que sería equivalente a los casos presentados.

- Si se presenta:



Se te sugiere:



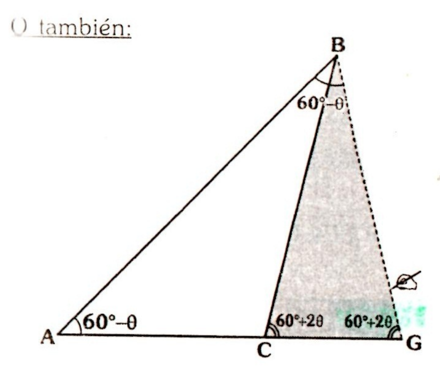
Trazar $\overline{BP}$ tal que $m\sphericalangle APB = 60° - \theta$ con ello se tendrá $m\sphericalangle CBP = 60° - \theta$

Tendremos entonces:

$$\Delta ABP \text{ y } \Delta CBP \text{ son isósceles}$$

$$\Rightarrow AB = BP = CP$$

O también:



Se puede trazar $\overline{BG}$ tal que:

$$m\sphericalangle AGB = 60° + 2\theta$$

Con lo cual tendremos:

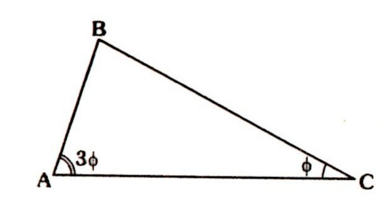
$$m\sphericalangle ABG = 60° - \theta$$

Luego:

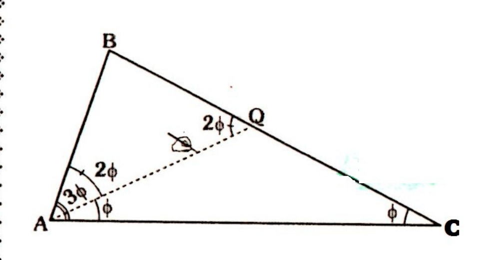
$$\Delta CBG \text{ y } \Delta ABG: \text{ son isósceles}$$

$$\Rightarrow AB = AG \text{ y } CB = BG$$

- En el gráfico:



Se te sugiere:



Trazar $\overline{AQ}$ tal que $m\sphericalangle QAC = \phi$

Con ello: $m\sphericalangle BAQ = 2\phi$

Por $\sphericalangle$ exterior: $m\sphericalangle BQA = 2\phi$

Se tiene entonces:

$$\Delta AQC \text{ y } \Delta ABQ \text{ son isósceles}$$

$$\Rightarrow AB = BQ \text{ y } AQ = QC$$

Nota

Los criterios indicados no son únicos y también no significa que siempre se van a emplear, solo son sugerencias.
El lector en la resolución de los ejercicios encontrará sus propios criterios.

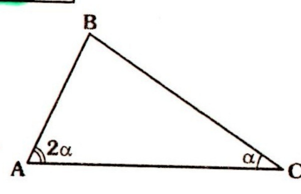


TEOREMAS SOBRE DESIGUALDADES EN TRIÁNGULOS

Los teoremas que se muestran a continuación, se demuestran con los teoremas antes mencionados y con algunas propiedades del álgebra que se indicarán.

En otras publicaciones se desarrollarán otras desigualdades geométricas.

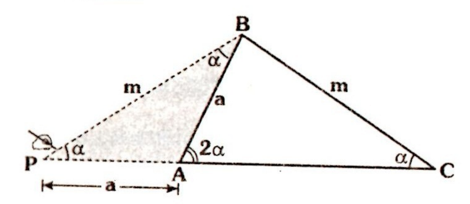
TEOREMA 39



En el gráfico, se cumple:

$$AB < BC < 2(AB)$$

Demostración



- Por T. de la correspondencia (*teorema 14*)

  Como: $m\sphericalangle BAC > m\sphericalangle ACB$

  $\Rightarrow \quad m > a \qquad \ldots (I)$

- Se traza $\overline{BP}$ tal que $m\sphericalangle BPA = \alpha$

  $\Rightarrow AP = AB = a$

  $PB = BC = m$

- En ΔPAB, por teorema de existencia.

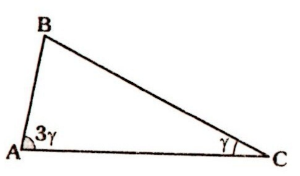
  $m < a + a$

  $m < 2a \qquad \ldots (II)$

- De (I) y (II):

$$a < m < 2a$$

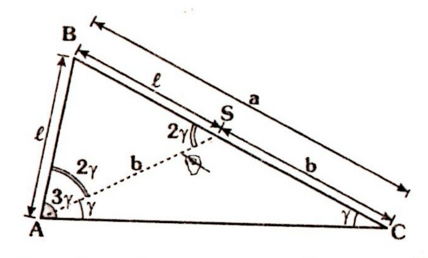
TEOREMA 40



En el gráfico, se cumple:

$$AB < BC < 3(AB)$$

Demostración



- En el gráfico se traza $\overline{AS}$ tal que $m\sphericalangle CAS = \gamma \Rightarrow \Delta ACS$ y ΔABS son isósceles

  $\Rightarrow AB = BS = \ell$

  $AS = SC = b$

- En el ΔABC por t. de la correspondencia como:

Como: $m\sphericalangle BAC > m\sphericalangle ACB \Rightarrow a > \ell \qquad \ldots (I)$

- En ΔABS por t. de existencia:

  $b < \ell + \ell$

  $b < 2\ell$

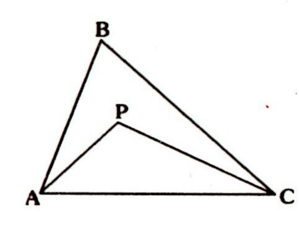
  $\Rightarrow \ell + b < 2\ell + \ell$

  Como $\ell + b = a \Rightarrow a < 3\ell \qquad \ldots (II)$

- De (I) y (II):

$$\ell < a < 3\ell$$

TEOREMA 41

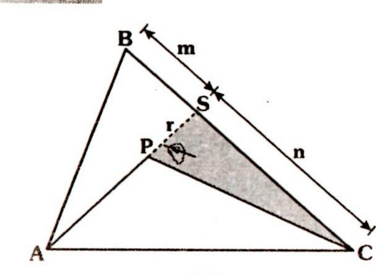


En el gráfico:

P: punto interior de ΔABC se cumple:

$$AP + PC < AB + BC$$

Demostración



- Se prolonga a $\overline{AP}$ hasta que corte a $\overline{BC}$ en S.
- Por teorema de existencia:

  En ΔABS: $AP + r < AB + m \qquad \ldots (I)$

  En ΔPSC: $PC < r + n \qquad \ldots (II)$

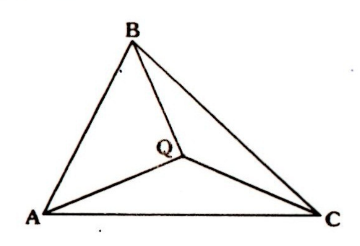
- Sumando (I) y (II):

  $AP + PC + r < AB + r + (m + n)$

- Como: $BC = m + n$

  $\Rightarrow AP + PC < AB + BC$

TEOREMA 42



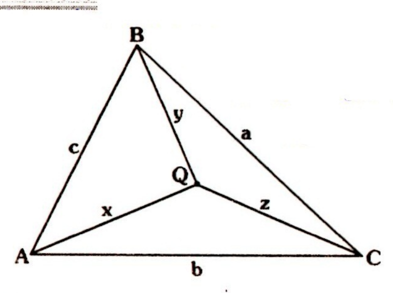
En el gráfico:

Q es un punto en la región interior del ΔABC y $2p = AB + BC + AC$

Se cumple:

$$p < QA + QB + QC < 2p$$

Demostración



- Tenemos $2p = a + b + c$
- Por teorema de existencia:

  En ΔBQC: $a < y + z \qquad \ldots (I)$

  En ΔAQC: $b < x + z \qquad \ldots (II)$

  En ΔAQB: $c < x + y \qquad \ldots (III)$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$a+b+c<2(x+y+z)$$

$$\Rightarrow 2p<2(x+y+z)$$

$$\Rightarrow \; p<x+y+z \qquad \ldots (IV)$$

- Por teorema 41:

En : $x+z<a+c$ ... (V)

En : $x+y<a+b$ ... (VI)

En : $y+z<b+c$ ... (VII)

- Sumando (V), (VI) y (VII), se tiene:

$$\not{2}(x+y+z)<\not{2}(a+b+c)$$

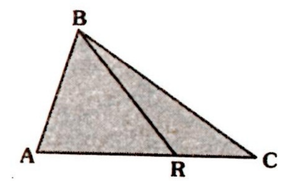
$$\Rightarrow x+y+z<a+b+c$$

$$\Rightarrow x+y+z<2p \qquad \ldots (VIII)$$

- De (IV) y (VIII):

$$p<x+y+z<2p$$

TEOREMA 43



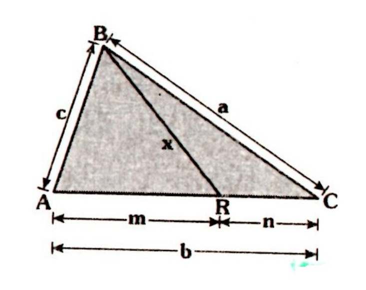
En el gráfico:

Sea p: semiperímetro de ▲ABC

Se cumple:

$$\mathbf{p-AC<BR<p}$$

Demostración



- Sea: $2p=a+b+c$ ... (α)
- Por teorema de existencia:

En ΔBRC : $x<a+n$ ... (I)

En ΔABR : $x<c+m$ ... (II)

- Sumando (I) y (II):

$$2x<a+c+m+n$$

- Como: $m+n=b \Rightarrow 2x<a+c+b$
- De (α) : $\Rightarrow 2x<2p$

$$\Rightarrow x<p \qquad \ldots (III)$$

En ΔABR : $c<m+x$ ... (I)

En ΔBRC : $a<n+x$ ... (V)

- Sumando (I) y (V):

$$a+c<m+n+2x$$

- Como $m+n=b \Rightarrow a+c<b+2x$

$$\Rightarrow a+c+b<2b+2x$$

$$2p<2b+2x$$

$$\Rightarrow p-b<x \qquad \ldots (VI)$$

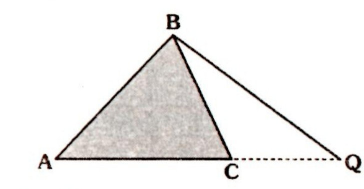
- De (III) y (VI):

$$p-b<x<p$$

Nota

El último teorema nos da las condiciones para reconocer a una ceviana interior relativa a un lado.

TEOREMA 44



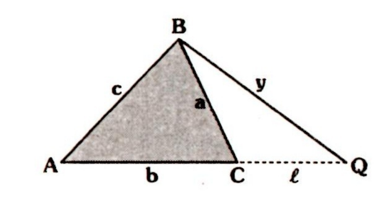
En el gráfico

p : semiperímetro de ABC

Se cumple:

$$\mathbf{BQ>p-AB}$$

Demostración



- Se tiene $a+b+c=2p$
- Por teorema de existencia

En ΔBCQ : $a<y+\ell$ ... (γ)

En ΔABQ : $b+\ell<c+y$ ... (α)

- Sumando (I) y (II):

$$a+b+\not{\ell}<2y+c+\not{\ell}$$

$$\Rightarrow a+b<2y+c$$

$$a+b+c<2y+2c$$

- Como $a+b+c=2p$

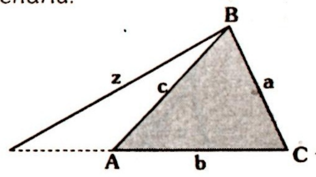
$$\Rightarrow 2p<2y+2c$$

$$p<y+c$$

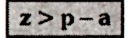
$$\therefore \; p-c<y$$

Observación

Si la ceviana exterior se encuentra en la región exterior relativa a $\overline{AB}$, se tendría:



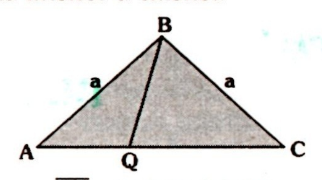
Se demuestra en forma análoga:



$$\mathbf{z>p-a}$$

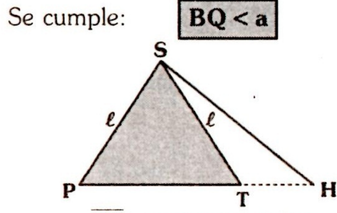
TEOREMA 45

Los siguientes teoremas se demuestran en forma inmediata (por teorema 13, del triángulo isósceles), son casos de la ceviana interior a exterior.



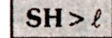
$\overline{BQ}$: ceviana interior

Se cumple: $\mathbf{BQ<a}$

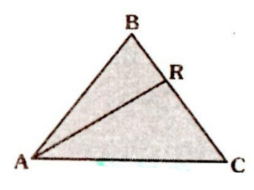


$\overline{SH}$: ceviana exterior

Se cumple:

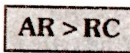


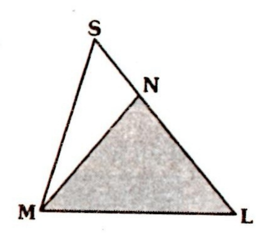
$$\mathbf{SH>\ell}$$



Si $AB = BC$

$\overline{AR}$: ceviana interior se cumple:





Si $MN = NL$

AS : ceviana exterior se cumple:

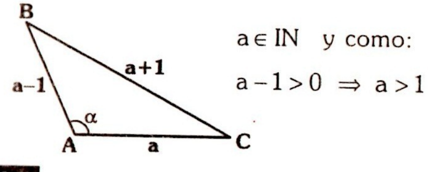


TEOREMA 46

Existe un sólo triángulo obtusángulo de longitudes enteras consecutivas.

Demostración

- Sean las longitudes de los lados: $a-1$, a y $a+1$, se puede observar como "$a+1$" corresponde al mayor lado se le opone al mayor ángulo.



$a \in IN$ y como:

$a-1>0 \Rightarrow a>1$

- Como α es el mayor ángulo $\Rightarrow \alpha > 90°$ por ser triángulo obtusángulo.
- Por teorema de existencia (*forma práctica*)

$$(a+1)-(a-1) < a < (a+1)+(a-1)$$

$$2 < a < 2a$$

- La desigualdad $a < 2a$ siempre se cumple, lo que aprovechamos aquí es:

$$a > 2 \qquad \dots (I)$$

- Como $\alpha > 90°$ y por teorema 21

$$(a+1)^2 > a^2 + (a-1)^2$$

$$\Rightarrow \quad (a+1)^2 - (a-1)^2 > a^2$$

- Por identidad de Legendre:

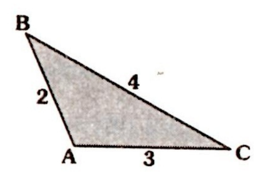
$$4a.1 < a^2$$

$$\Rightarrow \quad 4 < a \qquad \dots (II)$$

- De (I) y (II):

$$2 < a < 4$$

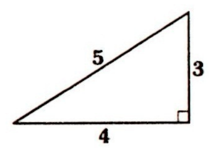
y como "a" es natural $\Rightarrow a = 3$ lo que hace que el triángulo sea único.



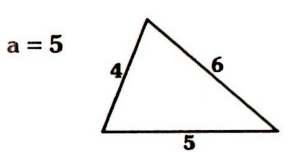
Es el único triángulo obtusángulo de longitudes enteras consecutivos.

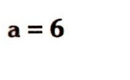
Observación

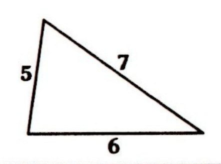
El único triángulo rectángulo de longitudes enteras consecutivas es:



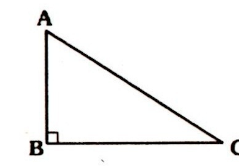
Los demás triángulos de longitudes enteras consecutivas son acutángulos. Si consideramos que los lados midan $a-1$, a y $a+1$, $a>4$ y $a \in \mathbb{N}$ se tendrán siempre lados de un triángulo acutángulo, por ejemplo:







TEOREMA 47

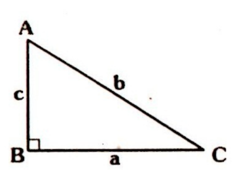


En el gráfico, p es semiperímetro de $\triangle ABC$

Se cumple:

$$AC > \frac{2}{3}p$$

Demostración



- Se tiene $a+b+c=2p$

  Como AC es el mayor lado se tiene:

$$b > a \qquad \dots (I)$$

$$b > c \qquad \dots (II)$$

- Sumando (I) y (II):

$$2b > a+c$$

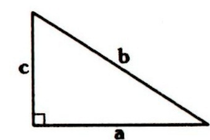
$$\Rightarrow \quad b+2b > a+c+b$$

- Pero: $2p = a+b+c$

$$\Rightarrow \quad 3b > 2p$$

$$\therefore \; b > \frac{2}{3}p$$

TEOREMA 48



En el gráfico, se cumple:

$$(a+b)^2 \leq 2c^2$$

Demostración

- Partimos de la desigualdad:

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2+b^2 \geq 2ab$$

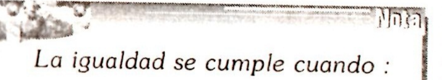
- Sumando a ambos miembros: $a^2 + b^2$, tendremos:

$$2(a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab$$

- Pero, por teorema de pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\Rightarrow \quad 2c^2 \geq (a + b)^2$$



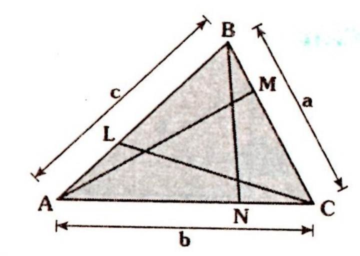
La igualdad se cumple cuando :

$a = b$

TEOREMA 49

La suma de longitudes de tres cevianas interiores, trazadas uno por vértice, está comprendido entre el semiperímetro y el triple de dicho semiperímetro.

Demostración



- Sea $2p = a + b + c$
- Por teorema 42

$$p - b < BN < p \qquad \ldots (I)$$

$$p - a < AM < p \qquad \ldots (II)$$

$$p - c < CL < p \qquad \ldots (III)$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$3p - (a + b + c) < BN + AM + CL < 3p$$

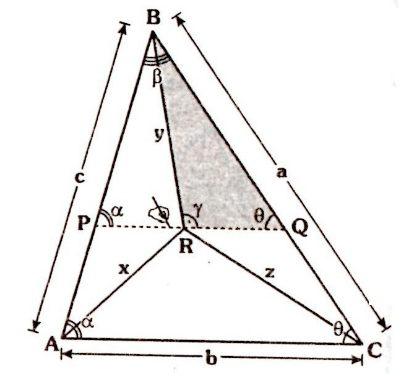
$$3p - 2p < BN + AM + CL < 3p$$

$$\therefore \; p < BN + AM + CL < 3p$$

TEOREMA 50 (Teorena de Visschers)

En todo triángulo la suma de distancias de un punto interior a sus vértices, es menor que la suma de los dos lados de mayor longitud.

Demostración



- Sea $a \geq c \geq b \Rightarrow \alpha \geq \theta \geq \beta$

  Se traza $\overline{PQ} // \overline{AC}$

  $\Rightarrow m\measuredangle BRQ = \alpha, \; m\measuredangle PQB = \theta$

- En ΔRBQ: como $\gamma > \alpha$ y $\alpha \geq \theta \Rightarrow \gamma > \theta$

  $\Rightarrow \theta < \gamma$, por t. correspondencia:

$$y < BQ \qquad \ldots (I)$$

- Por t. de existencia:

  En ΔAPR: $\quad x < AP + PR \qquad \ldots (II)$

  En ΔRQC: $\quad z < RQ + QC \qquad \ldots (III)$

  En ΔPBQ: como $\beta \leq \theta$, por teorema de la correspondencia:

$$PQ \leq PB \qquad \ldots (IV)$$

- Sumando (I), (II), (III) y (IV)

$$x + y + z + PQ < (AP + PB) + (BQ + QC) + (PQ + RQ)$$

$$\Rightarrow x + y + z + \cancel{PQ} < c + a + (\cancel{PQ})$$

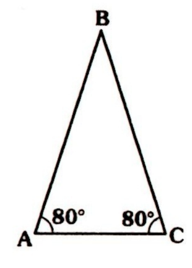
$$\therefore \; x + y + z < a + c$$

Observación

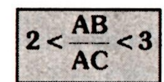
Si las longitudes de los lados de un triángulo son a , b y c tal que: $a \geq c \geq b$, *las distancias hacia los vértices de un punto interior son x, y, z,, del teorema 42 y 50, se cumple:*

$$\frac{a + b + c}{2} < x + y + z < a + c$$

TEOREMA 51



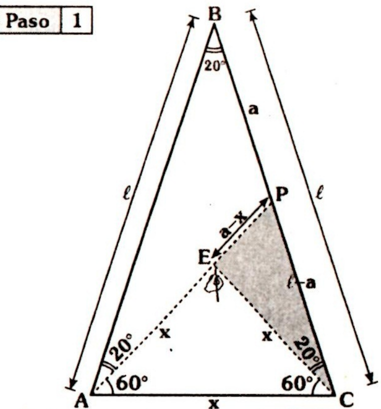
En el gráfico se cumple:



$$2 < \frac{AB}{AC} < 3$$

Demostración

- Como por condición las medidas angulares ya están dadas, significa que la razón $\frac{AB}{AC}$ también está dado, lo que el teorema afirma es que dicha razón se puede acotar. Lo cual se va a demostrar.



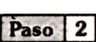
- Se traza interiormente el ΔAEC equilátero, con ello se tiene: $m\measuredangle EAB = 20°$. Al prolongar $\overline{AE}$ hasta que corte a $\overline{BC}$ en P

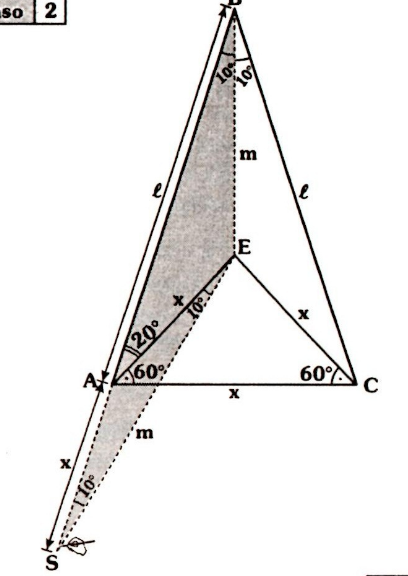
  $\Rightarrow \Delta ABP$ isósceles $\Rightarrow$ $AP = PB = a$

- En ΔEPC: Por existencia

$$x < (\ell - a) + (a - x)$$

$$\Rightarrow \quad 2x < \ell \qquad \ldots (I)$$





- En la prolongación de $\overline{BA}$ se ubica S tal que AS = x

$\Rightarrow \Delta EBS$: isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle AES = m\measuredangle ASE = 10°$

$\Rightarrow BE = ES = m$

- Por t. existencia:

$\Delta AEB: \quad \ell < m + x \quad \ldots(\alpha)$

$\Delta AES: \quad m < 2x$

$\Rightarrow m + x < 2x + x \quad \ldots(\beta)$

De (α) y (β):

$\ell < m + x < 3x$

$\therefore \ell < 3x \quad \ldots(\ell)$

- De (I) y (II): $2x < \ell < 3x$

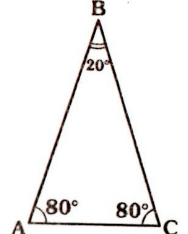
$\therefore 2 < \dfrac{\ell}{x} < 3$

Observación

La demostración del teorema anterior es equivalente a demostrar:

$$2 < \frac{\text{sen}\,80°}{\text{sen}\,20°} < 3$$

Debido a que:



Por ley de senos:

$$\frac{\ell}{x} = \frac{\text{sen}\,80°}{\text{sen}\,20°}$$

TEOREMA 52

El siguiente teorema se ha incluido en esta publicación pese a que se trata de un gráfico espacial.

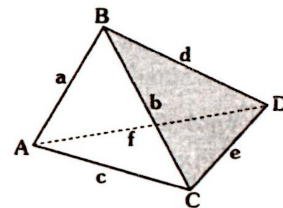
Sólo se requiere conocer que un tetraedro es un sólido limitado por cuatro regiones triangulares y que los lados se llamarán aristas.

Enunciado del teorema:

"En un tetraedro existe por lo menos un vértice tal que con las aristas concurrentes en él, se puede formar un triángulo".

Demostración

- Consideremos:



- En primer lugar observe los cuatro triángulos: ΔABC, ΔBCD, ΔADB y ΔACD.
- Consideremos también que para el vértice B, con respecto a las aristas: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$ hay dos posibilidades:

i) Si forman un triángulo, con ello ya estaría demostrado.

ii) Si no forman un triángulo se tendrá que el triángulo se formará con las aristas que concurran en A, C o D.

- Analicemos (ii):

Si ***no se forma el triángulo***, se cumple entonces:

$b \geq a + d \quad \ldots(I)$

- Analizando las aristas que concurran en "C".

En ΔABD: $\quad a + d > f \quad \ldots(II)$

De (I) y (II): $\quad b \geq a + d > f$

$\Rightarrow b > f \quad \ldots(III)$

- En ΔADC:

$e < f + c \quad \ldots(IV)$

De (III) $\quad f < b \Rightarrow f + c < b + c \quad \ldots(V)$

De (IV) y (V) se tendrá:

$e < f + c < b + c$

$\Rightarrow \boxed{e < b + c} \quad \ldots(\alpha)$

- En ΔADC: $\quad c < f + e \quad \ldots(VI)$

Como $f < b \Rightarrow f + e < b + c \quad \ldots(VII)$

De (VI) y (VII):

$c < f + e < b + e$

$\Rightarrow \boxed{c < b + e} \quad \ldots(\beta)$

- En ΔBCD: $\quad b < d + e \quad \ldots(VIII)$

De (I) y (VIII):

$a + d \leq b < d + e$

$\Rightarrow a + \cancel{d} < \cancel{d} + e$

$\Rightarrow a < e$

$\Rightarrow a + c < e + c \quad \ldots(IX)$

- En ΔABC: $\quad b < a + c \quad \ldots(X)$

De (IX) y (X):

$b < a + c < e + c$

$\Rightarrow \boxed{b < e + c} \quad \ldots(\gamma)$

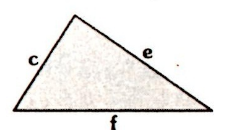
- De (α), (β) y (γ):

$e < b + c$

$c < b + e$

$b < e + c$

- Se concluye que con $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$ se podrá formar un triángulo.



TEOREMA 53

Dados cinco segmentos, tales que con cualquiera de ellos es posible construir un triángulo se cumple que al menos uno de ellos es acutángulo.

Demostración

- Sean a, b, c, d, y e las longitudes de los segmentos, tales que:

$a \leq b \leq c \leq d \leq e \quad \ldots(I)$

- Se puede notar que se formarán 10 triángulos (ya que $C_3^5 = 10$), el teorema nos afirma que por lo menos uno de ellos es acutángulo.
- Cada triángulo tiene sólo tres posibilidades; es acutángulo, rectángulo o obtusángulo, los lados se relacionan por la nota indicada en la página 25.
- Consideremos los triángulos de lados (a, b, c) y (c, d, e) si los triángulos fueran acutángulos cumplen:

$c^2 < a^2 + b^2 \quad y \quad e^2 < c^2 + d^2$

- Usaremos el método del absurdo, es decir, ***supongamos que no se cumple*** lo anterior, es decir:

$c^2 \geq a^2 + b^2 \;\; y \;\; e^2 \geq c^2 + d^2 \quad \ldots(\alpha)$

- Considerando la siguiente desigualdad [5]:

$\Rightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \quad \ldots(\beta)$

[5] *ver anexos, desigualdad de la media cuadrática*

Como:

$$c^2 \geq a^2 + b^2 \Rightarrow 2c^2 \geq 2(a^2 + b^2) \ldots \text{(II)}$$

De (β) y (II): $2c^2 \geq (a+b)^2$ ... (III)

De (α): $e^2 \geq c^2 + d^2$ ... (IV)

De (I): $d^2 \geq c^2$ ... (V)

- Sumando (III), (IV) y (V):

$$e^2 \geq (a+b)^2$$

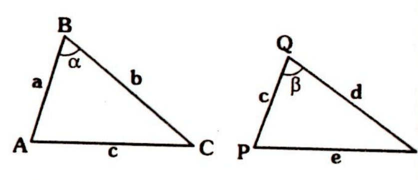
$$\Rightarrow \; e \geq a + b \quad \ldots \text{(VI)}$$

Pero con a, b y e es posible formar, se debe cumplir :

$$e < a + b \quad \ldots \text{(VII)}$$

(VI) y (VII) son contradictoria, entonces nuestra suposición es falsa, es decir se cumple:

$$c^2 < a^2 + b^2 \quad \text{o} \quad e^2 < c^2 + d^2$$



- Como "c" es el lado mayor en el ΔABC y como:

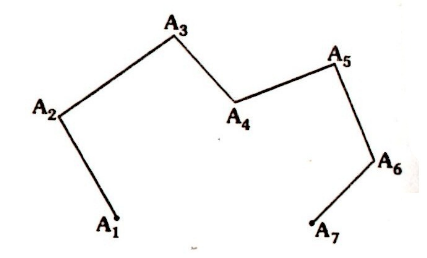
$$c^2 < a^2 + b^2 \Rightarrow \text{el } \Delta ABC$$

es acutángulo para el ΔPQR ocurre algo análogo.

POLIGONAL

Consideremos en un plano n puntos ($n \geq 3$ y $n \in \mathbb{N}$), tales como $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$, se define la poligonal o línea quebrada como la unión de $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ ... y $\overline{A_{n-1}A_n}$ con las siguientes condiciones:

- Dos segmentos consecutivos no deben estar en la misma recta.
- Los segmentos tengan en común a lo mas los extremos.



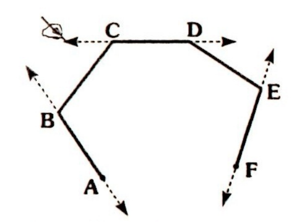
En el gráfico, $n = 7$

$$\text{poligonal} = \{\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \overline{A_3A_4} \cup \overline{A_4A_5} \cup \overline{A_5A_6} \cup \overline{A_6A_7}\}$$

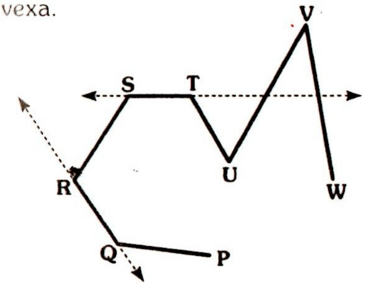
A los segmentos se les denomina lados y a los puntos A_1 y A_7 se les llama extremos.

POLIGONAL CONVEXA

Si toda recta que contiene a un lado ubica a la poligonal en un mismo semiplano, a la poligonal se le llamará convexa.



En el gráfico, ABCDEF es una poligonal convexa.



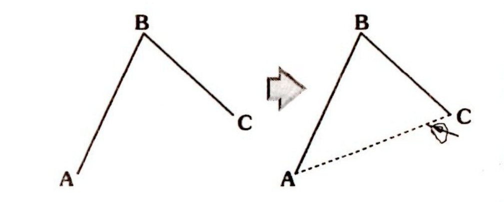
En el gráfico, la poligonal PQRSTUVW es no convexa.

TEOREMA 54

En toda poligonal la distancia entre los extremos es menor entre los extremos es menor que la suma de longitudes de todos los lados de la poligonal.

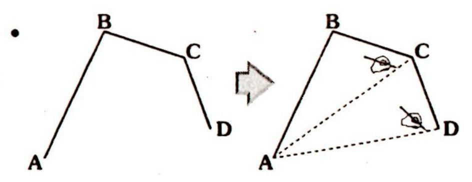
Demostración

- Consideremos las siguientes poligonales.



- Por teorema de existencia:

$$AC < AB + BC$$

- 

En ΔACD:

$$AD < AC + CD \quad \ldots \text{(I)}$$

En ΔABC:

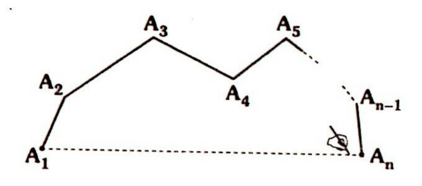
$$AC < AB + BC \quad \ldots \text{(II)}$$

De (I) y (II):

$$\Rightarrow AD < AB + BC + CD$$

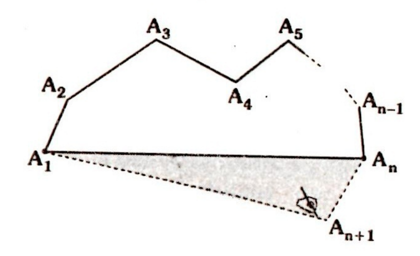
- Se puede ir aumentando lados o extremos demostrando el teorema, pero en realidad no garantizaría la veracidad del teorema. Usaremos para ello el método de inducción.[6]
- El método de inducción consta de las siguientes partes:
  - Demostrar para el menor valor, para el cual tiene sentido el teorema.
  - Supone que el teorema es válida para n, $n \in \mathbb{N}$ (*Hipótesis Inductiva*).
  - Demostrar que se cumple para $n+1$.
- La primera ya fue probado.
- Supongamos que es válida para "n".

[6] Sobre el método del inducción, ver anexos.



$A_1A_n < A_1A_2 + A_2A_3 + ... A_{n-1}A_n$ ...(α)

- Demostremos que se cumple para $n+1$.
- Consideremos la poligonal $A_1A_2A_3 ... A_nA_{n+1}$



- El punto A_{n+1}, no debe ser colineal con A_{n-1} y A_n o con A_1A_2 (por definición).
- En $\Delta A_1A_nA_{n+1}$:

$$A_1A_{n+1} < A_1A_n + A_nA_{n+1} \quad ...(\beta)$$

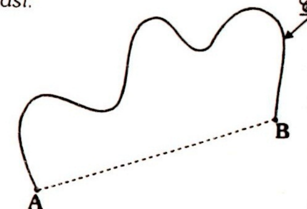
- Sumando (α) y (β):

$$A_1A_{n+1} < A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n + A_nA_{n+1}$$

Con lo cual queda demostrado el teorema $\forall n \in \mathbb{N} (n \geq 3)$.



- *La demostración es válida para una poligonal convexa y no convexa.*
- *Si ubicamos, dos puntos en un plano y trazamos la curva que los une así:*



ℓ: longitud de la curva $\mathscr{C}$

Se cumple: $AB < \ell$

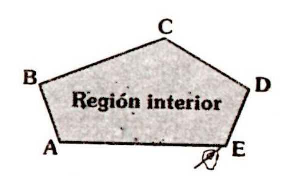
Para demostración de la última afirmación involucra elementos de cálculo superior, pero la mayor parte de la demostración ha sido indicada.

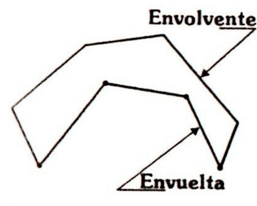
El paso final es definir la longitud de la curva como caso límite de la longitud de la poligonal cuyos vértices están en la curva.

ENVUELTA y ENVOLVENTE

Si unimos los extremos de una poligonal a la región limitada se le denominará región interior.

Si consideramos ahora dos poligonales con los mismos extremos y una de ellas se ubica en la región interior de la otra, se le denomina envuelta y a la otra envolvente.



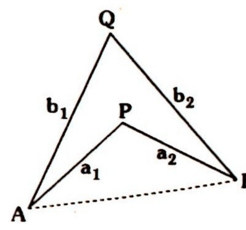


TEOREMA 55

La longitud de toda línea poligonal convexa es menor que la longitud de la poligonal que la envuelve.

Demostración

- Podemos partir, así; que la envuelta y la envolvente tengan igual cantidad de lados.

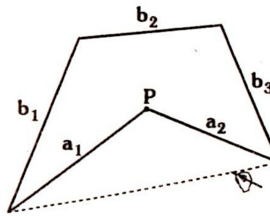


- Lo cual ya fue probado (*ver teorema* 40)

Se cumple entonces:

$$\mathbf{a_1 + a_2 < b_1 + b_2}$$

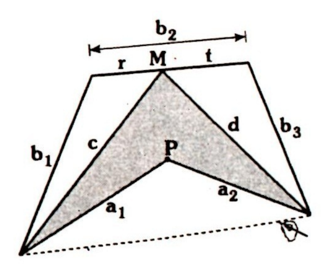
- Podemos hacer una serie de variantes así:



Se cumple:

$$\mathbf{a_1 + a_2 < b_1 + b_2 + b_3}$$

Lo cual se prueba de la siguiente forma



En A : $a_1 + a_2 < c + d$ ... (I)

En ΔAQM : $c < b_1 + r$ ... (II)

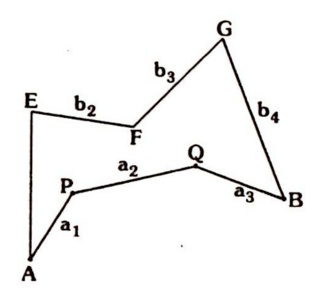
En ΔMRB : $d < b_3 + t$ ... (III)

Sumando (I), (II) y (III):

$$a_1 + a_2 + c + d < c + d + b_1 + b_3 + \underbrace{r + t}_{b_2}$$

$$a_1 + a_2 < b_1 + b_2 + b_3$$

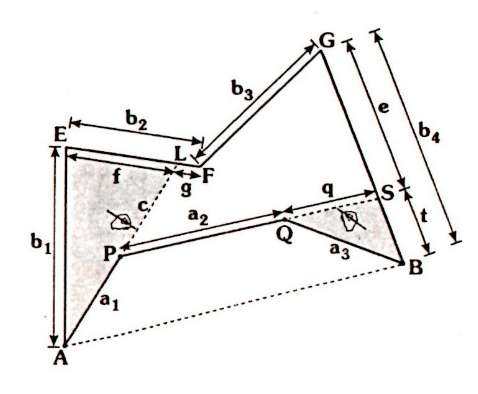
- Ahora podemos considerar la siguiente figura:



Se cumple:

$$\mathbf{a_1 + a_2 + a_3 < b_1 + b_2 + b_3 + b_4}$$

Probemos el último resultado:



En ΔAEF: $a_1 + c < b_1 + f$ ... (I)

En ΔQSB: $a_3 > q + t$ ... (II)

Por teorema 54

Para P y S:

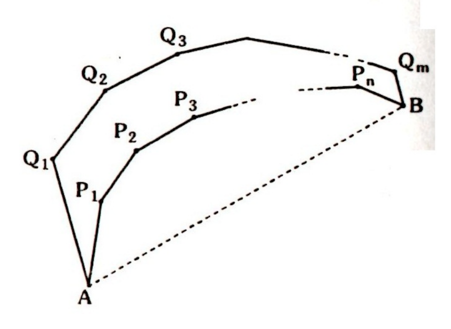
$$a_2 + q < c + g + b_3 + \theta \quad ...(III)$$

Sumando (I), (II) y (III):

$$a_1 + a_2 + a_3 + c + q < b_1 + \underbrace{(f+g)}_{b_2} + b_3 + \underbrace{(e+t)}_{b_4} + c + q$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 < b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

- Con lo cual queda probado el resultado, pero no podemos aún decir que el teorema ya fue probado. Es que solo hemos demostrado para casos particulares.
- Demostremos el teorema cuando ambas (la envuelta y la envolvente) son convexas.

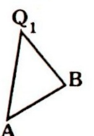


Demostraremos:

$$\boxed{AP_1 + P_1P_2 + ... + P_nB < AQ_1 + Q_1Q_2 + ... + Q_mB}$$

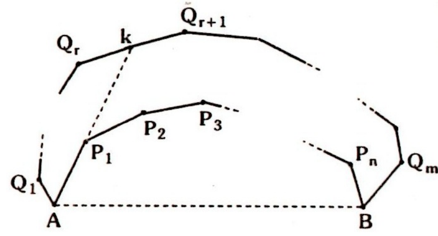
- Sea $n \geq 0$ y $m \geq 1$
- Por inducción fuerte em $m+n$
- Si $m+n=1$, es decir: $n=0$ y $m=1$

lo cual es cierto, por la desigualdad triangular:



- Supongamos que la hipótesis es cierta para: $1 \leq m+n \leq k$
- Demostraremos que es válida para:

$$m + n = k + 1$$



- Notemos que $1 \leq r \leq m$ y que B representa a Q_{m+1}
- Por teorema (54):

$$AP_1 + P_1k < AQ_1 + Q_1Q_2 + ... + Q_rk \quad ...(\alpha)$$

- Por hipótesis:

$$P_1P_2 + P_2P_3 + ... + P_nB < P_1k + kQ_{r+1} + ... + Q_mB \quad ...(\beta)$$

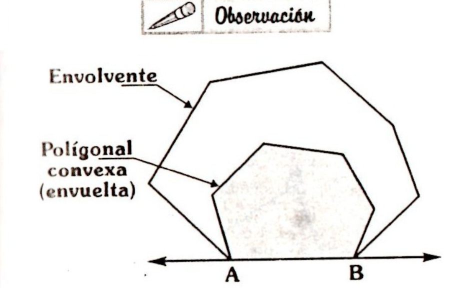
- Sumando (α) y (β):

$$AP_1 + \cancel{P_1k} + P_1P_2 + P_2P_3 + ... + P_nB < AQ_1 + Q_1Q_2 + ... + Q_rk + \cancel{P_1k} + kQ_{r+1} + ... + Q_mB$$

$$\therefore \boxed{AP_1 + P_1P_2 + ... + P_nB < AQ_1 + Q_1Q_2 + ... + Q_mB}$$

Con lo cual queda ya probado el teorema.

Observación



Sea ℓ_1: longitud de la envolente.

ℓ_2: longitud de la envuelta.

Del teorema anterior se demuestra:

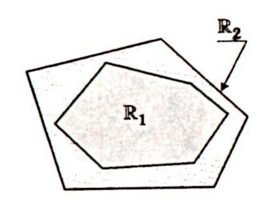
Como: $\ell_1 < \ell_2 \Rightarrow \underbrace{\ell_1 + AB}_{p_1} < \underbrace{\ell_2 + AB}_{p_2}$

$$\Rightarrow p_1 < p_2$$

p_1: *perímetro de la región limitada por la envuelta y $\overline{AB}$.*

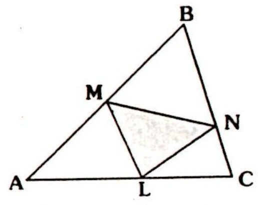
p_2: *perímetro de la región limitada por la envolvente y $\overline{AB}$.*

CASOS PARTICULARES



- Si $\mathbb{R}_1$ es convexo y es interior a $\mathbb{R}_2$
Se cumple:

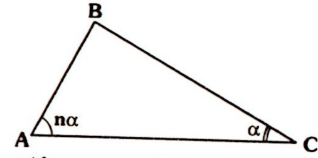
$$\boxed{\textbf{Perímetro}_{(\mathbb{R}_1)} < \textbf{Perímetro}_{(\mathbb{R}_2)}}$$



- Se cumple

$$\boxed{\textbf{Perímetro}_{(\blacktriangle MNL)} < \textbf{Perímetro}_{(\blacktriangle ABC)}}$$

TEOREMA 56



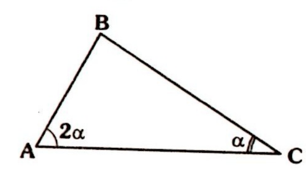
En el gráfico, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$
Se cumple:

$$AB < BC < n(AB)$$

Demostración

- La primera parte, es directo, puesto que $n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq 2 \Rightarrow n\alpha \geq 2\alpha > \alpha$
  Por teorema de la correspondencia:
  Como $n\alpha > \alpha \Rightarrow BC > AB$
- Para la segunda parte, $BC < n(AB)$ usaremos inducción

Cuando $n = 2$

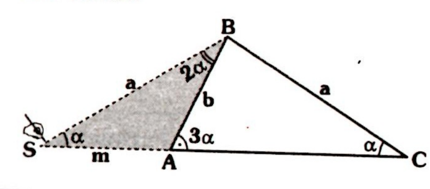


Por teorema 39: $BC < 2(AB)$

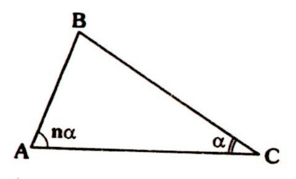
- Antes de indicar la hipótesis inductiva, analicemos para: $n = 3$ (De forma ilustrativa, lo cual nos dará la idea para el caso general).

Cuando $n = 3$

Ya fue probado (teorema 40), veamos otra forma:

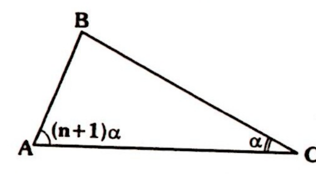


- Se prolonga $\overline{CA}$ hasta S, tal que:
  $m\measuredangle ASB = x \Rightarrow \Delta SBC$
  es isósceles $\Rightarrow SB = BS = a$
- En ΔSAB, por lo anterior :
  $m < 2b$ ... (I)
  ΔSAB, por existencia
  $a < m + b$ ... (II)
- Sumando (I) y (II):
  $a + m < m + 3b$
  $\Rightarrow a < 3b$
- Ahora sí, procedamos como se ha indicado en un prueba por inducción.
- Supongamos que se cumpla para n, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$

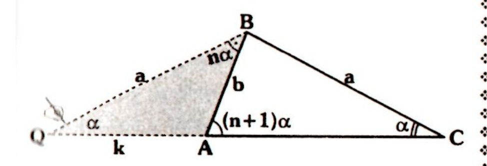


hipótesis inductiva: $BC < n(AB)$

- Probemos para "n + 1" :



- En forma análoga al caso de $n = 3$



- Se prolonga $\overline{CA}$ hasta Q tal que $m\measuredangle CQB = \alpha \Rightarrow \Delta QBC$ es isósceles
  $\Rightarrow QB = BC = a$
  Como :
  $m\measuredangle AQB = \alpha \Rightarrow m\measuredangle QBA = n\alpha$
- En ΔQAB :
  - Por hipótesis inductiva:
    $k < nb$ ... (I)
  - Por existencia $a < k + b$ ... (II)
- De (I) y (II): $a + k < k + (n+1)b$
  $\therefore a < (n+1)b$

Con lo cual queda concluida la demostración.

Otra forma:

Como para $n = 2$ ya fue aprobado y $n \geq 2 \Rightarrow n(AB) \geq 2(AB)$

Pero: $2(AB) > BC \Rightarrow n(AB) \geq 2(AB) > BC$

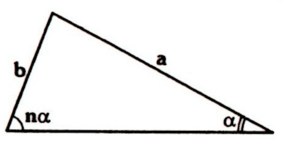
$\therefore BC < n(AB)$

Observación

- *La prueba realizada es equivalente a probar:*

$$1 < \frac{\text{sen}(n\alpha)}{\text{sen}\alpha} < n$$

$(n \in \mathbb{Z}^+ , n \geq 2)$



$$\frac{\text{sen}\, n\alpha}{\text{sen}\, \alpha} = \frac{a}{b}$$

Como $a < nb$

$\Rightarrow \frac{a}{b} < n$

- *Analizando:*

$$1 < \frac{a}{b} < n$$

ello no implica que sea 1 la mayor cota superior ni "n" la menor cota inferior, pero nos dá un intervalo. Por ejemplo en el teorema 51, cuando $n = 4$ *y* $x = 20°$, *se cumple* $1 < \frac{a}{b} < 4$, *lo cual es verdadero, pero se demostró:*

$$1 < \frac{a}{b} < 3$$

ANÁLISIS DE ALGUNOS DOBLECES PARA OBTENER LÍNEAS NOTABLES

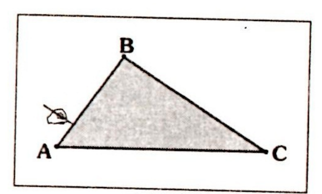
Toda persona interesada en educación matemática, reconoce el hecho que para aprender matemáticas hay que hacer matemáticas. Siendo en algunas etapas importante el aspecto manipulativo, por ello no es raro encontrar multitud de materiales y recursos como TAMGRAM, GEOPLANOS, VARILLAS, TROQUELES, etc, que potencian el hecho de hacer matemáticas.

El recurso más usual es el papel y no por ello menos atractivo.

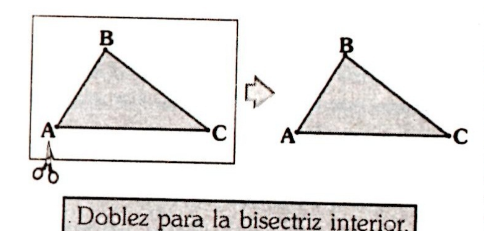
Se llama papiroflexía (también llamado ORIGAMI) como el arte de realizar figuras doblando papel, sin cortar ni pegar.

Las relaciones entre matemáticas y origami son hoy en día fuentes de investigación, se han realizado la elaboración de un sistema axiomático (axiomas de Huzita). En esta publicación no mencionaremos dichos axiomas, al lector interesado en la bibliografía le indicaré algunas páginas y unos textos concernientes al tema.

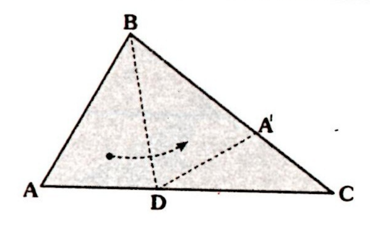
- Trazamos un triángulo sobre una hoja de papel



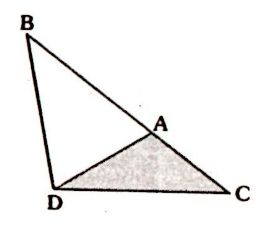
- Enseguida recortamos



Doblez para la bisectriz interior.

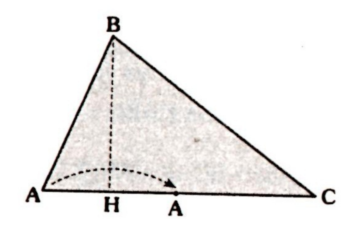


- Si llevamos A sobre $\overline{BC}$.

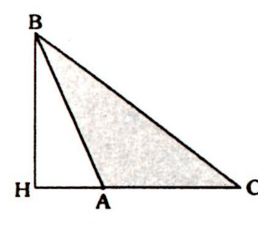


- El resultado de este doblez nos da la bisectriz interior $(\overline{BD})$

Doblez para la altura

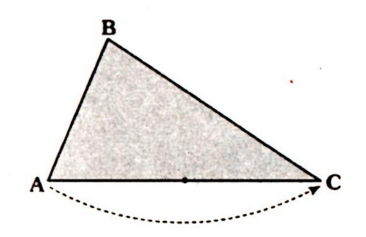


- Llevamos A hacia $\overline{AC}$, haciendo el doblez desde B.

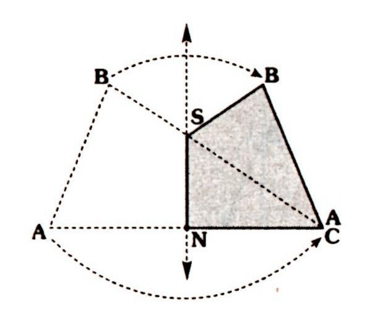


- El resultado de este doblez nos dará la altura $(\overline{BH})$.

Doblez para la mediatriz de un lado.



- Llevamos A sobre C y hacemos el doblez, se obtendrá $\overline{MN}$.



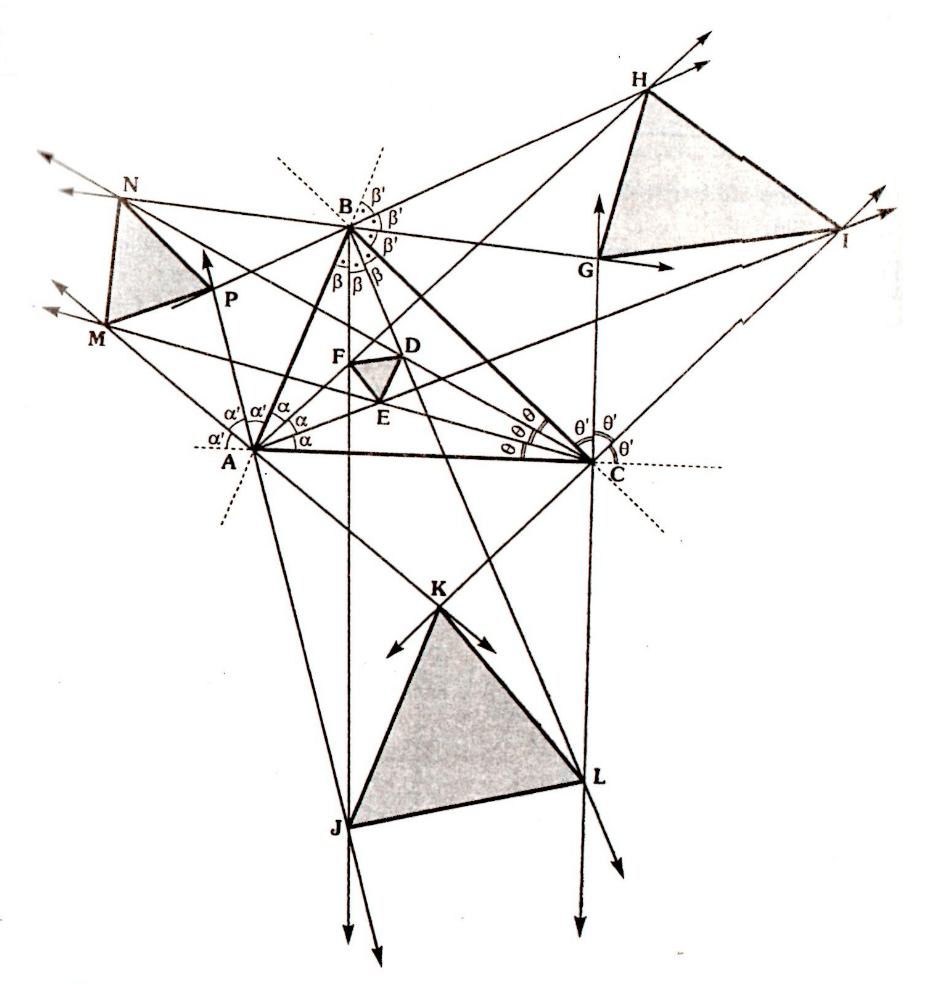
- $\overline{SN}$ representará parte de la mediatriz de $\overline{AC}$ (notar $m\angle ANS = m\angle SNC = 90°$ y $AN = NC$).



- *Del último doblez se obtiene la mediana desde B (haciendo el doblez de borde $\overline{BN}$)*
- *En realidad si llevamos A sobre cualquier punto de $\overline{AC}$, se obtendrá el doblez de un segmento perpendicular a $\overline{AC}$.*
- *Para obtener algún doblez que se relacione con la bisectriz exterior o una altura (en el triángulo obtusángulo), se requiere representar la región exterior con parte del papel.*



TEOREMA DE MORLEY



Al trisecar los ángulos internos como externos del triángulo ABC, se tiene que los triángulos DEF, GHI, JKL y MNP son equiláteros.

(Una forma de la demostración se encuentra en la publicación de "Puntos Notables" - Pág. 180)

Geometría

ENUNCIADO DE LOS
PROBLEMAS RESUELTOS

- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

TRIÁNGULOS

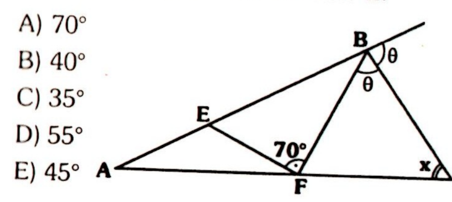
Problemas Resueltos

Ciclo Anual

PROBLEMA Nº 1

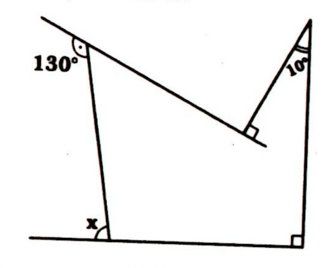
En el gráfico, AE=EF. Calcule **x**.

A) 70°
B) 40°
C) 35°
D) 55°
E) 45°



PROBLEMA Nº 2

Del gráfico, calcule **x**.

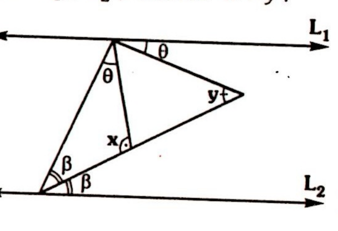


A) 40°   B) 45°   C) 60°
D) 65°   E) 70°

PROBLEMA Nº 3

En el gráfico $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule $x+y$.

A) 90°
B) 120°
C) 135°
D) 180°
E) 270°



PROBLEMA Nº 4

En el triángulo ABC se ubican P, Q y M en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{PQ}$ respectivamente. Si $\overline{AM}$ y $\overline{CM}$ son bisectrices de los ángulos BAC y ACB respectivamente y $\overline{PQ} // \overline{AC}$. Si: $AP+QC=6$.
Calcule PQ

A) 12   B) 3   C) 9
D) 6   E) 4,5

PROBLEMA Nº 5

En el gráfico, $x+y=80°$,
Calcule $\alpha+\beta+\theta$

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 80°
E) 45°

PROBLEMA Nº 6

En el gráfico, calcule $\alpha+\beta+\theta+\omega$.

A) 140°
B) 160°
C) 170°
D) 130°
E) 180°

PROBLEMA Nº 7

Se tiene el triángulo ABC, en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica D, Si $m\measuredangle BDA = 2(m\measuredangle BCA) = 20°$, $AC = AD$ y $BC = CD$. Calcule $m\measuredangle CAD$

A) 40°   B) 50°   C) 80°
D) 50°   E) 45°

PROBLEMA Nº 8

En el triángulo ABC, se ubica D en $\overline{AC}$ tal que $m\measuredangle ABC = 80° + m\measuredangle BAC$ y $DC = BC$ calcule $m\measuredangle ABD$

A) 40°   B) 50°   C) 65°
D) 80°   E) 60°

PROBLEMA Nº 9

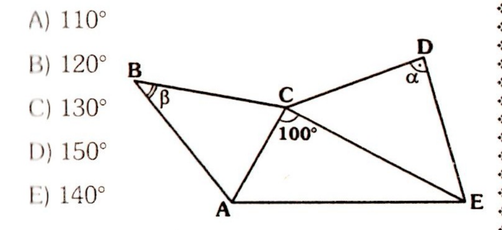
En el triángulo isósceles ABC de base BC, se traza la ceviana interior BM. Si $AM = MB = BC$, calcule $m\measuredangle MBC$.

A) 18°   B) 30°   C) 36°
D) 54°   E) 45°

PROBLEMA Nº 10

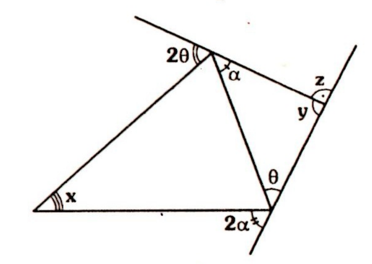
En el gráfico, los triángulos ABC y CDE son isósceles de bases $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$ respectivamente. Si $\alpha+\beta=140°$, calcule $m\measuredangle BCD$.

A) 110°
B) 120°
C) 130°
D) 150°
E) 140°



PROBLEMA Nº 11

Del gráfico, calcule $\frac{x+y}{z}$.



A) 1   B) $\frac{1}{2}$ C) 2
D) 3   E) $\frac{1}{3}$

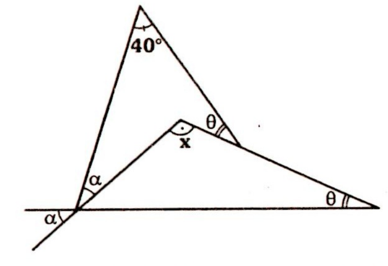
PROBLEMA Nº 12

Los lados de un triángulo isósceles miden 5cm y 12cm. Calcule el perímetro de la región triangular.

A) 22cm   B) 29cm
C) 22 ó 29cm   D) 27cm
E) 30cm

PROBLEMA Nº 13

Del gráfico, calcule **x**.



A) 100°   B) 130°   C) 110°
D) 120°   E) 140°

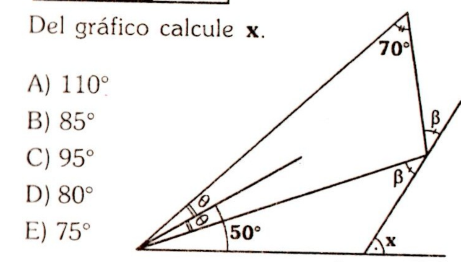
PROBLEMA Nº 14

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AM, tal que $AB = BM$ y $m\sphericalangle MAC = 10°$. Calcule $m\sphericalangle BAC - m\sphericalangle BCA$

A) 10° B) 5° C) 20°
D) 7,5° E) 15°

PROBLEMA Nº 15

Del gráfico calcule **x**.



A) 110°
B) 85°
C) 95°
D) 80°
E) 75°

PROBLEMA Nº 16

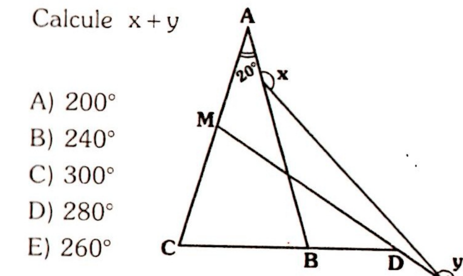
En el triángulo ABC se trazan la bisectriz interior CD y la altura BH (H en $\overline{AC}$). Si $m\sphericalangle ABH = m\sphericalangle BCD$, $AH = 3$ y $HC = 4$. Calcule BC.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 17

En el gráfico, $AB = AC$ y $DM = DC$

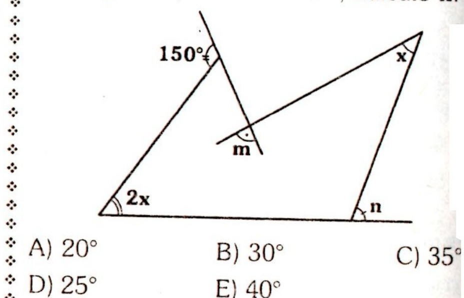
Calcule $x + y$



A) 200°
B) 240°
C) 300°
D) 280°
E) 260°

PROBLEMA Nº 18

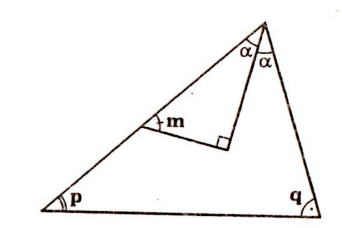
En el gráfico, $m + n = 150°$, calcule **x**.



A) 20° B) 30° C) 35°
D) 25° E) 40°

PROBLEMA Nº 19

Indique la alternativa correcta en el gráfico.



A) $m = \frac{p-q}{2}$ B) $m = \frac{p+q}{2}$

C) $m = \frac{p+q}{3}$ D) $m = p + q$

E) $m = \frac{p+q}{4}$

PROBLEMA Nº 20

En el triángulo ABC, se cumple $m\sphericalangle ABC = 98°$, luego se ubica D exterior y relativo a $\overline{AC}$. Si $AB = AD$, $m\sphericalangle CAD = x$, $m\sphericalangle BAC = 60° - x$ y $m\sphericalangle ADC = 164°$. Calcule x.

A) 6° B) 12° C) 10°
D) 8° E) 9°

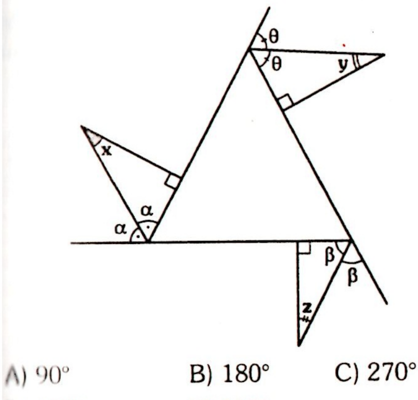
PROBLEMA Nº 21

En el triángulo isósceles ABC $(AB = BC)$, se ubica E en la prolongación de $\overline{CB}$, desde el cual se traza la perpendicular a $\overline{AC}$, cortando a $\overline{AB}$ en F. Si $AF = 7$ y $CE = 29$. Calcule EB

A) 11 B) 10 C) 20
D) 22 E) 18

PROBLEMA Nº 22

Del gráfico, calcule $x + y + z$



A) 90° B) 180° C) 270°
D) 120° E) 135°

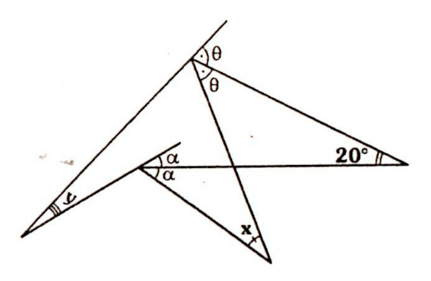
PROBLEMA Nº 23

En el triángulo rectángulo NPQ (recto en P) se trazan las cevianas interiores PB y QA, tal que $m\sphericalangle PQN = 2(m\sphericalangle NPB)$. Si $NP = AN + QB$. Calcule $m\sphericalangle PAQ$.

A) 44° B) 45° C) 30°
D) 60° E) 56°

PROBLEMA Nº 24

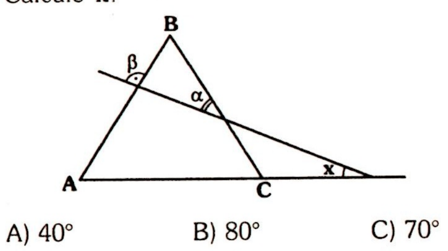
Del gráfico, calcule $x - y$



A) 10° B) 15° C) 20°
D) 40° E) 30°

PROBLEMA Nº 25

En el gráfico, $AB = BC$ y $\alpha + \beta = 40°$. Calcule **x**.



A) 40° B) 80° C) 70°
D) 45° E) 50°

PROBLEMA Nº 26

Los lados de un triángulo miden 10, a y 2a, calcule el menor valor entero de a.

A) 4 B) 3 C) 2
D) 5 E) 1

PROBLEMA Nº 27

Calcule el mayor valor entero de la longitud de un lado, si el perímetro de su región es 40.

A) 20 B) 21 C) 22
D) 19 E) 18

PROBLEMA Nº 28

En el triángulo ABC, se ubican los puntos D y E en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $m\measuredangle BCA = 60°$, $m\measuredangle AED = 35°$ y $BD = BC = EC$. Calcule $m\measuredangle BAC$

A) 60° B) 80° C) 50°
D) 70° E) 40°

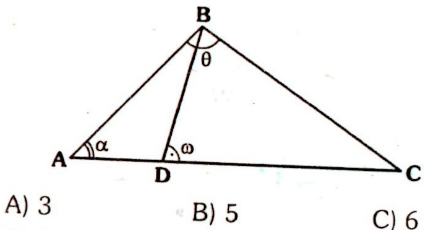
PROBLEMA Nº 29

Calcule el perímetro de una región triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 5 y 6 y el tercero tiene por longitud el doble de uno de los otros dos.

A) 19 B) 20 C) 22
D) 23 E) 21

PROBLEMA Nº 30

En el gráfico, $\alpha + \theta = 2\omega$, AD=3 y AC=8. Calcule BC.



A) 3 B) 5 C) 6
D) 4 E) 2

PROBLEMA Nº 31

En el gráfico, calcule el mayor valor entero de AB+BC.

A) 8
B) 9
C) 11
D) 13
E) 10

PROBLEMA Nº 32

Calcule el perímetro de una región triangular, sabiendo que los lados tienen longitudes enteras y miden $2x-1$, $6-x$ y $3x-1$.

A) 6 B) 14 C) 12
D) 10 E) 15

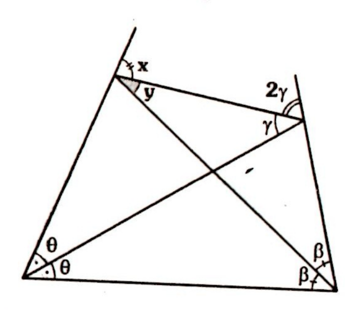
PROBLEMA Nº 33

En la región interior de un triángulo equilátero se ubica un punto, tal que la suma de distancias de dicho punto a los vértices es 9m. Calcule la longitud del lado del triángulo equilátero, sabiendo que es entera.

A) 5m B) 4m C) 3m
D) 1m E) 2m

PROBLEMA Nº 34

Del gráfico, calcule x/y.



A) $\frac{1}{2}$ B) 3 C) $\frac{1}{3}$
D) 2 E) 1

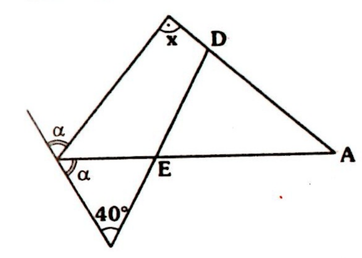
PROBLEMA Nº 35

Se tiene el triángulo ABC, en $\overline{AC}$ se ubica D, tal que $m\measuredangle ACB = \alpha$, $m\measuredangle BAC = 2\alpha$ y $m\measuredangle DBC = 3\alpha$. Si AB=12 y BD=10. Calcule CD.

A) 21 B) 23 C) 18
D) 22 E) 20

PROBLEMA Nº 36

En el gráfico, AD=AE. Calcule **x**.



A) 100° B) 80° C) 85°
D) 90° E) 95°

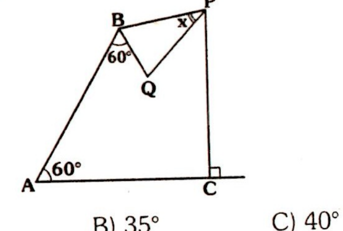
PROBLEMA Nº 37

En el triángulo ABD se ubica el punto C en la región exterior relativa a $\overline{AD}$ tal que $AB = BC = AC = BD$. Calcule $m\measuredangle ADC$

A) 30° B) 15° C) 40°
D) 45° E) 20°

PROBLEMA Nº 38

En el gráfico, AB=AC=PC y BP=PQ. Calcule **x**.



A) 25° B) 35° C) 40°
D) 45° E) 30°

PROBLEMA Nº 39

En el triángulo ABC se cumple AB = 2 y $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$. Calcule el valor de BC.

A) 2 B) 4 C) 3
D) 6 E) 5

PROBLEMA Nº 40

Se tiene el triángulo ABC(AB = BC), se ubica E, F y D en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si DF=EF y

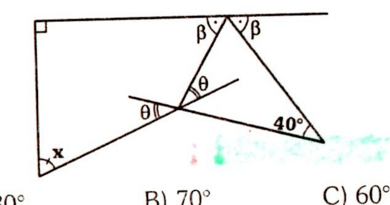
$$m\measuredangle BEF + m\measuredangle DFC = 78°.$$

Calcule $m\measuredangle ADE$

A) 39° B) 22° C) 24°
D) 32° E) 26°

PROBLEMA Nº 41

Del gráfico, calcule **x**.



A) 80° B) 70° C) 60°
D) 65° E) 75°

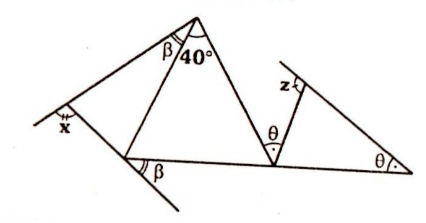
PROBLEMA Nº 42

Del gráfico, calcule **x**.

A) 50°
B) 80°
C) 40°
D) 65°
E) 75°

PROBLEMA Nº 43

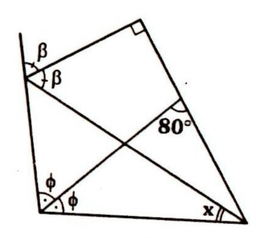
Del gráfico, calcule $z+x$.



A) 220° B) 210° C) 300°
D) 260° E) 280°

PROBLEMA Nº 44

Del gráfico, calcule **x**.



A) 10° B) 20° C) 15°
D) 5° E) 25°

PROBLEMA Nº 45

En el triángulo ABC, las bisectrices trazas de A y C se cortan en P. Si AP=6 y PC=8. Calcule el número de valores enteros de AC.

A) 0 B) 1 C) 3
D) 2 E) 4

PROBLEMA Nº 46

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior BF, si AF=a, AB=b y

$$m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$$

Calcule BC.

A) $a+b$ B) $\sqrt{a^2+b^2}$ C) $\sqrt{ab}$
D) $a-b$ E) $\frac{a+b}{2}$

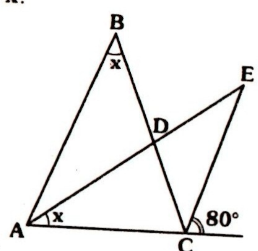
PROBLEMA Nº 47

En el triángulo isósceles ABC (AC=BC), se traza la bisectriz interior BR, tal que AB=BR. Calcule $m\measuredangle BCA$.

A) 24° B) 36° C) 30
D) 48° E) 18°

PROBLEMA Nº 48

En el gráfico, AB=BC y AD=CE. Calcule **x**.



A) 40° B) 50° C) 30°
D) 60° E) 20°

PROBLEMA Nº 49

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, tal que AD=BC; BD=DC y $m\measuredangle BAC = m\measuredangle DBC$. Calcule $m\measuredangle BAC$

A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 36°

PROBLEMA Nº 50

En el triángulo ABC se ubica el punto D, exterior y relativo a $\overline{AC}$, tal que $AB=BC=AD$, $m\measuredangle ACD = 2x$ y

$m\measuredangle ADC = 3(m\measuredangle BAC) = 9x$

Calcule **x**.

A) 10° B) 15° C) 18°
D) 12° E) 20°

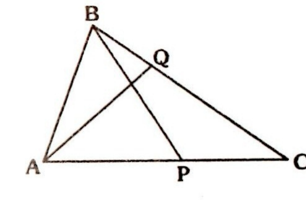
PROBLEMA Nº 51

En el triángulo rectángulo ABC (AB=BC), se ubica el punto F exterior y relativo a $\overline{AC}$, de modo que AB=CF y $m\measuredangle ACF = 15°$. Calcule $m\measuredangle CAF$

A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30

PROBLEMA Nº 52

En el gráfico, $AB = AQ = m$ y $BP = PC$. Si m es par, calcule el menor entero de BP.



A) $m-1$ B) $\frac{m}{2}+1$ C) $\frac{m}{2}-1$
D) $\frac{m}{2}-2$ E) m

PROBLEMA Nº 53

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B). Se trazan las cevianas interiores AM y CN tal que $AN = MN = MC$. Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AM}$ y $\overleftrightarrow{CN}$.

A) 90° B) 120° C) 135°
D) 60° E) 108°

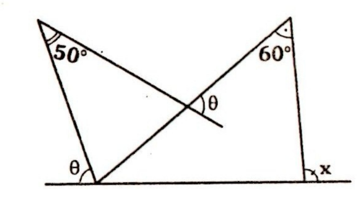
PROBLEMA Nº 54

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores BP y BQ tal que PC=BC y AQ=AB. Si $m\measuredangle ABC = 100°$. Calcule $m\measuredangle PBQ$.

A) 80° B) 50° C) 70°
D) 25° E) 40°

PROBLEMA Nº 55

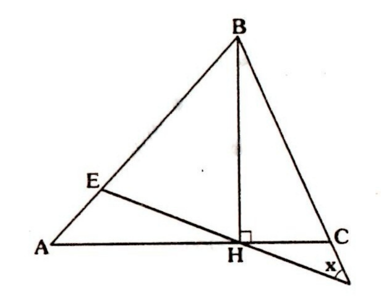
Del gráfico, calcule **x**.



A) 100° B) 80° C) 110°
D) 85° E) 120°

PROBLEMA Nº 56

En el gráfico, AB=AC y BH=BE. Calcule **x**.



A) 60° B) 45° C) 30°
D) 36° E) 72°

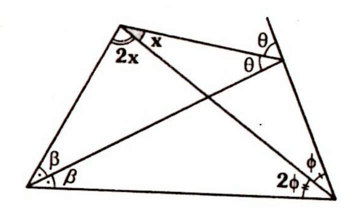
PROBLEMA Nº 57

En el triángulo ABC se cumple $m\sphericalangle BCA = 2(m\sphericalangle BAC) = 40°$. En la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica P, tal que $PC = AB + BC$. La medida del ángulo CPB es:

A) 20° B) 10° C) 15°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA Nº 58

Del gráfico, calcule **x**.



A) 30° B) 18° C) 20°
D) 36° E) 15°

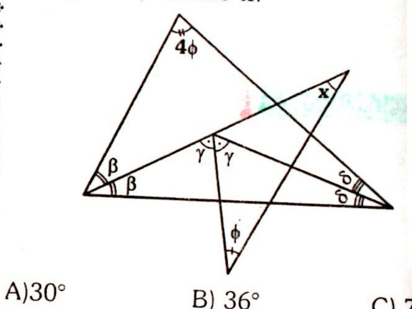
PROBLEMA Nº 59

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{AF}$ y la altura $\overline{BH}$ secantes en M. Si $m\sphericalangle FAC = 2(m\sphericalangle HBC)$ y $AF = BC = 6$. Calcule el mayor valor entero de AB.

A) 10 B) 11 C) 13
D) 12 E) 9

PROBLEMA Nº 60

Del gráfico, calcule **x**.



A) 30° B) 36° C) 72°
D) 45° E) 60°

Problemas Resueltos
Ciclo Cepre-Uni

PROBLEMA Nº 61

(1°P.C - 2001-II)

En un triángulo ABC; AB=BC; D ∈ $\overline{AC}$; E ∈ AD; AE=BC y $m\sphericalangle DBC = 2(m\sphericalangle EBD)$. Calcule $m\sphericalangle BDA$.

A) 30° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 75°

PROBLEMA Nº 62 (SEMINARIO 2007-I)

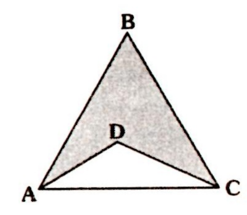
En un triángulo ABC sus lados miden $AB = \sqrt{x^2 - 1}$; BC=2 y AC=3. Entonces ¿cuántos valores enteros de **x** satisfacen la condición del triángulo?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

PROBLEMA Nº 63 (SEMINARIO 2007-I)

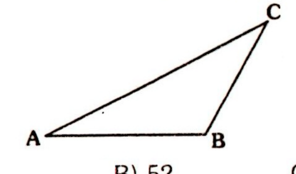
Calcule el menor valor expresado en números enteros de la parte sombreada, sabiendo que el perímetro del triángulo equilátero ABC es mayor que 33m; AD=4m y CD=9m.

A) 30m
B) 38m
C) 36m
D) 37m
E) 40m



PROBLEMA Nº 64 (SEMINARIO 2007-II)

En la figura mostrada, se verifica AC=21u, BC=7u y AB=x, calcule el mayor valor entero de: $(2x - 3)$



A) 36 B) 52 C) 38
D) 39 E) 40

PROBLEMA Nº 65 (SEMINARIO 2007-II)

En el triángulo ABC se cumple que BC=7u y $m\sphericalangle A = 2m\sphericalangle C$. Se trazan la bisectriz interior BP y la bisectriz exterior BQ, Q pertenece a la prolongación de $\overline{CA}$. Calcule PQ.

A) 16 B) 15 C) 14
D) 13 E) 12

PROBLEMA Nº 66 (SEMINARIO 2003-II)

En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior desde el vértice B, la cual interseca en H a la perpendicular trazada desde C a dicha bisectriz. Si $m\sphericalangle BAC - m\sphericalangle BCA = 20°$. Halle la medida del ángulo ACH.

A) 5° B) 7° C) 9°
D) 10° E) 20°

PROBLEMA Nº 67 (SEMINARIO 2003-II)

En el interior de un triángulo ABC se ubica D tal que BD=AC y

$$\frac{m\measuredangle ACD}{2}=\frac{m\measuredangle DCB}{3}=\frac{m\measuredangle BAD}{7}=$$

$m\measuredangle DAC = m\measuredangle DBC$.

Calcule $m\measuredangle ABD$.

A) 60° B) 50° C) 40°
D) 30° E) 20°

PROBLEMA Nº 68 (SEMINARIO 2003-II)

En un triángulo ABC, desde el vértice B se trazan las perpendiculares $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ a las bisectrices exteriores de los ángulos A y C. Si $m\measuredangle ABC=\theta$, entonces la $m\measuredangle PBQ$ es:

A) $90°+\frac{2}{3}\theta$ B) $90°+\theta$
C) $90°+\frac{\theta}{2}$ D) $90°+\frac{3}{4}\theta$
E) $90°+\frac{3}{5}\theta$

PROBLEMA Nº 69 (1era P.C. 2002-II)

En un triángulo ABC, $m\measuredangle A=60°$; $m\measuredangle C=10°$, sean los puntos $M\in\overline{AC}$ y $Q\in\overline{BC}$ de modo que $AB=BQ=AM$. Calcule $m\measuredangle QMC$.

A) 30° B) 35° C) 45°
D) 55° E) 70°

PROBLEMA Nº 70 (1era P.C. 2003-I)

Se tiene un triángulo ABC, en $\overline{BC}$ se ubican los puntos Q y S ($Q\in\overline{BS}$) y en $\overline{AC}$ se ubican los puntos P, R y T ($P\in\overline{AR}$ y $T\in\overline{RC}$).

Si $AB=BP=PQ=QR=RS=ST=TC$, calcule la medida del ángulo ACB sabien do que es el mayor número entero.

A) 10° B) 13° C) 15°
D) 18° E) 14°

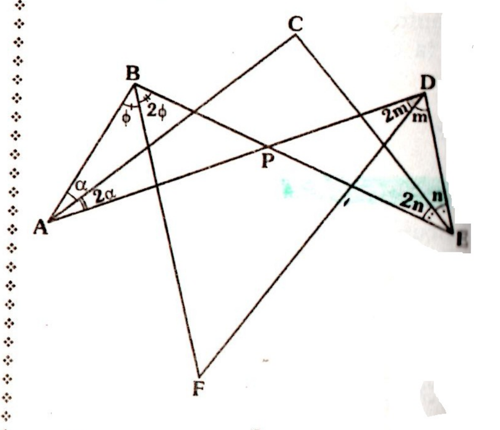
PROBLEMA Nº 71 (SEMINARIO 2006-II)

¿Cuántos triángulos isósceles existen de perímetro 18 y lados enteros?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 72

En la figura mostrada, se cumple $m\measuredangle ACE+m\measuredangle BFD=\omega$, entonces la $m\measuredangle BPD$ es:



A) 2ω B) $\frac{3}{2}\omega$ C) ω
D) $\frac{5}{3}\omega$ E) $\frac{2}{3}\omega$

PROBLEMA Nº 73 (SEMINARIO 2006-II)

En un triángulo ABC, se trazan las bisectrices interiores AF y BE que se intersecan en I. Si AI=b, BC=a y $m\measuredangle BAC=2(m\measuredangle BCA)$

Entonces la longitud de $\overline{AB}$ es:

A) $\frac{(a-b)}{2}$ B) $a-b$ C) $\frac{a+b}{3}$
D) $\frac{(a+b)}{4}$ E) $2b-a$

PROBLEMA Nº 74 (1era P.C. 2003-II)

En un triángulo ABC, se ubica P exterior a dicho ángulo, tal que $\overline{AP}$ interseca a $\overline{BC}$. Si $BP=10u$, $BC=13u$ y $AP=11u$, luego el máximo valor entero (en u) del lado AC es:

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

PROBLEMA Nº 75 (1era P.C. 2005-I)

En un triángulo ABC se cumple $m\measuredangle BCA=18°$ y $AB>BC$. Entonces, el mínimo valor entero para la medida del ángulo ABC es:

A) 145° B) 144° C) 147°
D) 150° E) 153°

PROBLEMA Nº 76 (1era P.C. 2005-II)

Se tiene un triángulo ABC, AB=BC=a, donde **a** pertenece a los naturales, una recta secante interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en F y E respectivamente y a la prolongación de $\overline{AC}$ en D, si la $m\measuredangle ADF>m\measuredangle ABC$, AD=a y EF=3. El mínimo valor entero de la longitud del segmento DE es:

A) $a-4$ B) $a-2$ C) $a-1$
D) $a+1$ E) $a+2$

PROBLEMA Nº 77 (1era P.C. 2007-I)

Se tiene el triángulo ABC, en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente, diferentes de los vértices. Entonces se cumple:

A) $PQ+AC=AQ+PC$
B) $PQ+AC<AQ+PC$
C) $2(PQ)+AC>PC+AQ$
D) $PQ+AC>PC+AQ$
E) $PQ-AC>2(PC)-AQ$

PROBLEMA Nº 78 (1° P.C. 2007-I)

En un triángulo escaleno ABC la bisectriz del ángulo BAC y la bisectriz del ángulo exterior en C se intersecan en E. La bisectriz del ángulo AEC interseca a $\overline{AC}$ en D y a la bisectriz del ángulo ABC en F. Si $m\measuredangle EDC=\theta$ halle $m\measuredangle BFE$:

A) $90°-\frac{\theta}{2}$ B) $45°-\theta$ C) 3θ
D) $\frac{\theta}{2}$ E) θ

PROBLEMA Nº 79

(1er. EXÁMEN PARCIAL 2001-I)

Los lados de un triángulo miden:

$8u$; $(5+\sqrt{16-x})u$ y $(5-\sqrt{16-x})$

La suma de todos los valores enteros posibles que puede tomar **x** es:

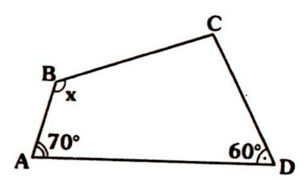
A) 150 B) 146 C) 140
D) 136 E) 120

PROBLEMA Nº 80

(1er. EXÁMEN PARCIAL 2001-I)

En la figura, $AD = AB + BC$ y $BC = CD$, halle **x**.

A) 100°
B) 120°
C) 130°
D) 135°
E) 140°



PROBLEMA Nº 81

(1er. EXAMEN PARCIAL 2000-II)

Se tiene un triángulo isósceles ABC cuyo ángulo desigual ABC mide θ grados. Se trazan, la mediatriz de $\overline{AB}$ y la bisectriz del ángulo ACB, los cuales forman un ángulo agudo de **x** grados. Entonces la relación entre **x** y θ es:

A) $x = \frac{\theta}{4}$ B) $90° - \frac{\theta}{4}$

C) $x = 45° - \frac{\theta}{2}$ D) $x = 180° - 4\theta$

E) $x = 45° - \frac{3\theta}{4}$

PROBLEMA Nº 82

(Texto CEPRE UNI - 2004)

En el interior de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica Q; $\overline{AQ} \cap \overline{BC} = \{E\}$; $\overline{CQ} \cap \overline{AB} = \{F\}$. Si $AQ + QC = 10u$ y $QE + QF = 4u$ ¿cuántos posibles valores enteros para la longitud de la hipotenusa existen?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 83

(Texto CEPRE UNI- 2004)

En un triángulo isósceles ABC(AB = BC), se ubica el punto interior Q de modo que

$$m\measuredangle ABQ = m\measuredangle QAC = 30°;$$
$$m\measuredangle QBC = 10°$$

Calcule $m\measuredangle BQC$.

A) 120° B) 135° C) 150°
D) 100° E) 90°

PROBLEMA Nº 84

(Texto CEPRE UNI - 2004)

En un triángulo ABC, $m\measuredangle ACB = 30°$; $m\measuredangle ABC = 105°$, sea M punto medio de $\overline{BC}$. Calcule $m\measuredangle MAC$.

A) 15° B) 20° C) 30°
D) 45°/2 E) 18°

PROBLEMA Nº 85

(Texto CEPRE UNI-2004)

En un triángulo acutángulo ABC, la bisectriz del ángulo ABC y la bisectriz exterior del ángulo C se intersecan en F; las bisectrices de los ángulos BAC y BFC, se intersecan en R y al lado $\overline{BC}$ en P y Q respectivamente, entonces el triángulo PQR es:

A) Isósceles B) Equilátero
C) Rectángulo D) No está definido
E) Escaleno

PROBLEMA Nº 86

(Texto CEPRE - UNI 2004)

Dado un triángulo ABC(AB = BC), se ubican P, Q y R en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente de modo que PQR es un triángulo equilátero. Si $m\measuredangle BPQ = \alpha$ y $m\measuredangle RQC = \beta$. Calcule $m\measuredangle PRA$.



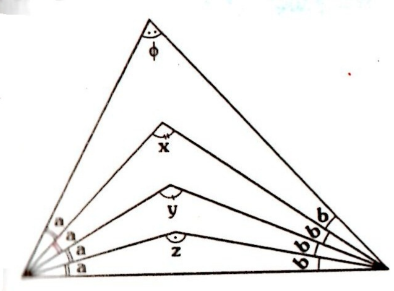
A) $\alpha - \beta$ B) $\frac{\alpha + \beta}{2}$

C) $\alpha + \beta$ D) $45° - \frac{(\alpha + \beta)}{2}$

E) $90° - \frac{(\alpha + \beta)}{2}$

PROBLEMA Nº 87 **(1er SEMINARIO 99-I)**

En el siguiente gráfico, calcule $x + y + z$.



A) $270° + \frac{3}{2}\phi$ B) $270° + \frac{3}{4}\phi$

C) $135° + \frac{3}{2}\phi$ D) $135° + \frac{3}{4}\phi$

E) $360° - \frac{3}{4}\phi$

PROBLEMA Nº 88 **(1er SEMINARIO 99-I)**

En un triángulo ABC se ubica el punto interior O, si OA=x; OB=2x y OC=3x. Además AB=5u; BC=6u y AC=7u. Calcule entre que valores varía **x**.

A) $1,75 < x < 2,16$ B) $1,75 < x < 2,4$

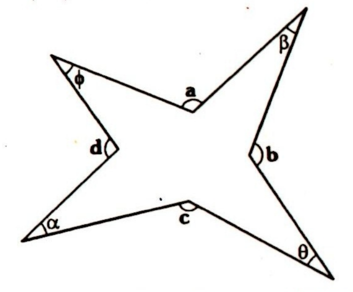
C) $\frac{5}{3} < x < 2,4$ D) $1 < x < 2$

E) $1,75 < x < 2$

PROBLEMA Nº 89 **(1er SEMINARIO 99-I)**

En el siguiente gráfico, calcule:

$$\alpha + \phi + \beta + \theta;\ \text{si}\ a + b + c + d = 518°$$



A) 154° B) 156° C) 157°
D) 158° E) 159°

PROBLEMA Nº 90 **(1er SEMINARIO 99-I)**

En un triángulo ABC (obtuso en B), $D \in \overline{AC}$, $E \in \overline{AB}$, $F \in \overline{BC}$, $m\measuredangle ADE = a + b$; $m\measuredangle EDF = a - b$; $m\measuredangle FDC = 3b - a$.

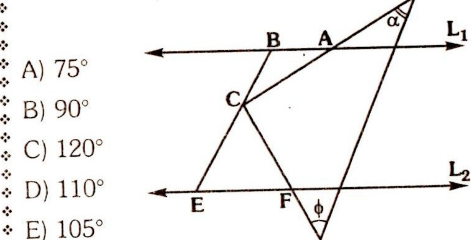
Si $m\measuredangle BAC = 8°$, $m\measuredangle BED = m\measuredangle BFD$ y b toma su mayor valor entero. ¿Cuánto mide el ángulo ABC?

A) 138° B) 156° C) 148°
D) 162° E) 152°

PROBLEMA Nº 91 **(1er SEMINARIO 98-I)**

En el gráfico $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, AB=BC y EC=EF, calcule $\alpha + \phi$.

A) 75°
B) 90°
C) 120°
D) 110°
E) 105°



PROBLEMA Nº 107 (1er SEMINARIO 99-II)

En un triángulo ABC las bisectrices interiores se intersecan en I, por I se traza una perpendicular a $\overline{CI}$ la cual interseca a la bisectriz exterior del triángulo ABC, trazada desde A en Q. La bisectriz exterior del triángulo AIQ, trazada desde Q interseca a la prolongación de $\overline{IC}$ en el punto P.

Si $2(m\sphericalangle IPQ) = m\sphericalangle ABC$. Calcule $m\sphericalangle IPQ$.

A) 60° B) 54° C) 45°
D) 36° E) 30°

PROBLEMA Nº 108 (1er SEMINARIO 99-II)

La raíces de la ecuación :

$$x^3 - 7x^2 + 12x - nx^2 + 7nx - 12n = 0$$

son las medidas de los lados de un triángulo. Halle la suma de todos los valores enteros posibles de **n**.

A) 18 B) 20 C) 15
D) 22 E) 23

PROBLEMA Nº 109 (1er SEMINARIO 2007-II)

Dado un triángulo, sus ángulos interiores miden:

$$(3x + 2y),\ (3x - 2y)\ \text{ y }\ (4y - 3x)$$

¿Cuál es el menor valor entero múltiplo de tres que puede tomar y?

A) 21° B) 24° C) 27°
D) 30° E)33°

PROBLEMA Nº 110 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo ABC isósceles, se cumple $m\sphericalangle ABC = 100°$, se trazan las cevia-nas interiores BP y CQ, tal que:

$$m\sphericalangle ABP = m\sphericalangle BCQ = 30°$$

Calcule $m\sphericalangle CQP$.

A) 20° B) 40° C) 30°
D) 50° E) 36°

PROBLEMA Nº 111 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y CN, las prolongaciones de las cevianas interiores trazadas desde M y N en los triángulos AMC y ANC respectivamente, se cortan en Q, tal que:

$$m\sphericalangle MCN = 2(m\sphericalangle MAC)\ ;$$

$$m\sphericalangle NAM = 2(m\sphericalangle ACN)\ ;$$

$$m\sphericalangle ANQ = 3(m\sphericalangle AMQ)\ ;\ y$$

$$m\sphericalangle QMC = 3(m\sphericalangle QNC)$$

Calcule $m\sphericalangle MQN$

A) 90° B) 100° C) 105°
D) 110° E) 120°

PROBLEMA Nº 112 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo PQR, se traza la bisectriz interior RT, se ubica M en $\overline{QR}$, por M se traza una recta perpendicular a la bisectriz, la recta interseca a $\overline{RP}$ en el punto F. Si $m\sphericalangle QPR + m\sphericalangle RQP = \theta$. Calcule $m\sphericalangle RMF$.

A) θ B) $\frac{\theta}{2}$ C) 2θ
D) $\frac{2\theta}{3}$ E) $\frac{3\theta}{4}$

PROBLEMA Nº 113 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo ABC se cumple:

$$m\sphericalangle ABC + m\sphericalangle ACB = 100°$$

Calcule la medida del ángulo agudo que determinan la altura trazada desde B y la bisectriz exterior trazada de A.

A) 50° B) 48° C) 40°
D) 60° E) 55°

PROBLEMA Nº 114 (1er SEMINARIO 2005-II)

En el lado BC de un triángulo ABC se ubica D, tal que CD=L y

$$2(m\sphericalangle CDA) = m\sphericalangle BAC + m\sphericalangle ABC$$

Calcule AC.

A) L B) $\frac{L}{2}$ C) $\frac{L}{3}$
D) $\frac{2}{3}L$ E) $\frac{3}{4}L$

PROBLEMA Nº 115 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo ABC (recto en B) se traza la altura BH. Las bisectrices de los ángulos ABH y HBC cortan a $\overline{AC}$ en M y N respectivamente.

Si $AB + BC - AC = K$. Calcule MN.

A) K B) $\frac{2}{3}K$ C) $\frac{3}{4}K$
D) $\frac{K}{2}$ E) $\frac{3}{5}K$

PROBLEMA Nº 116 (1er SEMINARIO 2005-II)

En el triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores BD y CE, luego se trazan los rayos DP y EP tal que:

$$m\sphericalangle BEP = 2(m\sphericalangle PEC)\ ;$$

$$m\sphericalangle CDP = 2(m\sphericalangle PDB)\ y$$

$$m\sphericalangle BAC = \omega$$

Calcule $m\sphericalangle EPD$

A) $\omega/2$ B) $60° - \omega$ C) 45°
D) 60° E) $180° - 2\omega$

PROBLEMA Nº 117 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo ABC, en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica Q, a partir del cual se traza el rayo secante a $\overline{BC}$ en E y a $\overline{AB}$ en D.

Si $m\sphericalangle BCQ = 134°$ y $AQ = AB = QD$.

Calcule el valor entero de $m\sphericalangle ABC$.

A) 39° B) 41° C) 43°
D) 45° E) 46°

PROBLEMA Nº 118

(1er SEMINARIO 2005-II/ texto CEPRE UNI 2004

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. En un triángulo ABC se cumple que $AB > AC$, las bisectrices interiores de los ángulos B y C, se intersecan en I, entonces $IB > IC$.

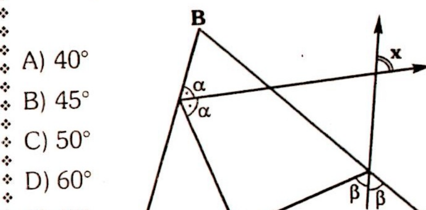
II. M es un punto de $\overline{BC}$, entonces $AM < p$; siendo p el semiperímetro del triángulo.

III. Todo triángulo isósceles también es acutángulo.

A) VVF B) VVV C) FVF
D) VFV E) FVV

PROBLEMA Nº 119 (1er SEMINARIO 2006-I)

En el gráfico, $m\sphericalangle ABC = 40°$, calcule **x**.



A) 40°
B) 45°
C) 50°
D) 60°
E) 65°

PROBLEMA Nº 120 (1er SEMINARIO 200-I)

Se tienen los triángulos ABC y AMN, donde $M \in \overline{AC}$ y $B \in \overline{AN}$, además:

$$m\measuredangle MBC = m\measuredangle NBC \quad ;$$

$$m\measuredangle BMN = m\measuredangle NMC$$

Si $m\measuredangle BAC = \phi$. Halle la medida del ángulo entre las bisectrices interiores de los ángulos en N y C.

A) $90° + \frac{\phi}{4}$ B) $135° - \frac{\phi}{4}$

C) $45° + \frac{\phi}{4}$ D) $90° + \frac{\phi}{4}$

E) $45° - \frac{\phi}{4}$

PROBLEMA Nº 121 (1er SEMINARIO 2006-I)

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior desde A y la bisectriz exterior desde C, las cuales se cortan en E, las bisectrices de los ángulos ABC y AEC se intersecan en Q e intersecan a $\overline{AC}$ en M y N. Si $MN = 8\,cm$. Calcule MQ (en cm)

A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

PROBLEMA Nº 122 (1er SEMINARIO 2006-II)

En un triángulo se trazan las cevianas interiores BE y AD de manera que $AB = AE = BD$, $DE = DC$ y $m\measuredangle BAE = 60°$. Calcule $m\measuredangle EDC$.

A) 80° B) 90° C) 100°
D) 120° E) 145°

PROBLEMA Nº 123 (1er SEMINARIO 2006-II

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores BE y CD, F es un punto interior del triángulo ABC tal que

$$m\measuredangle BDF = 4(m\measuredangle FDC) \quad ;$$

$$m\measuredangle FEC = 4(m\measuredangle BEF) \quad ;$$

$$m\measuredangle BDC = 5(m\measuredangle CDF) \; y$$

$$m\measuredangle DAE + m\measuredangle DFE = 180°$$

Calcule $m\measuredangle BAC$

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 100° E) 101°

PROBLEMA Nº 124 (1er SEMINARIO 2006-II)

En un triángulo ABC, la bisectriz interior del ángulo A y exterior del ángulo C se intersecan en E. Por el punto E se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ que interseca a los lados BC y BA en P y Q respectivamente. Si $AQ - CP = \ell$, entonces la longitud de $\overline{PQ}$ es:

A) ℓ B) $\frac{\ell}{2}$ C) $\frac{2}{3}\ell$

D) $\frac{\ell}{3}$ E) $\frac{3}{4}\ell$

PROBLEMA Nº 125 (1er SEMINARIO 2006-II)

En un triángulo ABC (recto en B), AB=BC, se ubica P interior al triángulo, tal que $3(m\measuredangle BAP) = 2(m\measuredangle PBC) = 6(m\measuredangle PCA)$.

Entonces $m\measuredangle APC$ es:

A) 120° B) 105° C) 136°
D) 144° E) 150°

PROBLEMA Nº 126 (1er SEMINARIO 2006-II)

Los lados AB, BC y AC de un triángulo miden 8; 10 y 12 u respectivamente. Se ubica F en la región interior tal que $AF = \frac{BF}{2} = \frac{CF}{3}$. ¿Entre que valores se encuentra el perímetro del triángulo AFC?

A) Entre 24 y 26 B) Entre 24 y 28
C) Entre 26 y 28 D) Entre 25 y 29
E) Entre 24 y 27

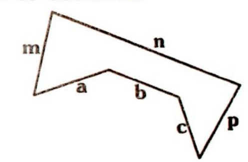
PROBLEMA Nº 127 (1er SEMINARIO 2006-II)

Sean los triángulos rectángulos ABC y AEC, cuya hipotenusa común es $\overline{AC}$ y cuyos catetos de mayor longitud son $\overline{AB}$ y $\overline{CE}$ los cuales se intersecan en Q. Si $AB + CE = 12$ y $AE + BC = 6$, entonces la suma de los valores enteros de la longitud de AC es:

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

PROBLEMA Nº 128 (SEMINARIO 2007-I)

Si $n - b = k$ ¿cuál de las siguientes expresiones es correcta?



I. $\frac{a+c}{2} < m + p - k$

II. $a + c + k < m + p$

III. $a + c < m + p + k$

IV. $a + c < \frac{m+p}{2} - k$

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) Sólo IV E) I y III

PROBLEMA Nº 129 (1er SEMINARIO 2007-II)

En un triángulo ABC se tiene que el ángulo ABC mide 100°. En el exterior del triángulo ABC y en el interior del ángulo ABC se ubica el punto P. Si $PA = AB$; $m\measuredangle BAP = 60°$ y $m\measuredangle APC = 160°$. Calcule $m\measuredangle PAC$.

A) 10° B) 12° C) 8°
D) 15° E) 16°

PROBLEMA Nº 130 (1er SEMINARIO 2007-I)

En el triángulo MNP se cumple: $m\measuredangle MNP = 21°$ y $PM > NP$. Entonces el mínimo valor entero para la medida del ángulo NPM es:

A) 159° B) 119° C) 149°
D) 129° E) 139°

PROBLEMA Nº 131 (1er SEMINARIO 2007-I)

Dado un triángulo ABC tal que $AB < AC$, se toma sobre $\overline{AC}$ el punto D, tal que AD=AB y resulta que D equidista de B y C. Halle $m\measuredangle B$ en función de $m\measuredangle C$.

A) $m\measuredangle C$ B) $2(m\measuredangle C)$ C) $3(m\measuredangle C)$

D) $\frac{3}{2}(m\measuredangle C)$ E) $\frac{1}{2}(m\measuredangle C)$

PROBLEMA Nº 132 (1er SEMINARIO 2007-I)

En el triángulo ABC se trazan las bisectrices exteriores desde los vértices A y B, que se intersecan con las prolongaciones de las bisectrices interiores de los vértices B y A respectivamente en los puntos P y Q.

Si $m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle BCA) = \alpha$, entonces la medida del ángulo agudo que determinan las rectas AQ y BP es:

A) $90° - \frac{\alpha}{3}$ B) $90° - \frac{\alpha}{2}$ C) $90° - \frac{2}{3}\alpha$

D) $90° - \frac{\alpha}{4}$ E) $90° - \frac{3}{4}\alpha$

PROBLEMA Nº 133 (1er SEMINARIO 2007-I)

En un triángulo ABC se ubica un punto interior P, tal que la suma de (PA + PB + PC) es un número entero. Calcule dicha suma en m si $AB = 1,2m$; $BC = 1,6m$ y $AC = 1,5m$.

A) 3   B) 4   C) 5
D) 6   E) 7

PROBLEMA Nº 134 (1er SEMINARIO 2007-I)

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BD. Si $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$; $BC = 8u$ y $AD = 3u$, entonces la longitud de $\overline{AB}$ (en u) es:

A) 2   B) 1   C) 5
D) 3   E) 6

PROBLEMA Nº 135 (1er SEMINARIO 2007-II)

En un triángulo ABC (recto en B), se traza la altura BH. La bisectriz del ángulo BAC interseca a la altura BH en M y al cateto BC en P. Entonces el triángulo MBP es:

A) Equilátero   B) Obtuso   C) Isósceles
D) Escaleno   E) Rectángulo

PROBLEMA Nº 136 (1er SEMINARIO 2007-II)

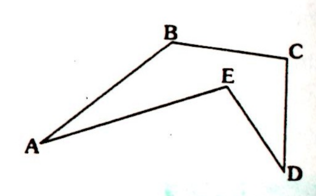
En un triángulo isósceles ABC (AB = BC), se traza la bisectriz interior AD. Si $AD = 16u$, entonces la menor longitud entera del segmento CD es:

A) 7u   B) 8u   C) 9u
D) 10u   E) 11u

PROBLEMA Nº 137 (1er SEMINARIO 2006-II)

En el gráfico demostrar:

$$AE + ED < AB + BC + CD$$



PROBLEMA Nº 138 (1er SEMINARIO 200-I)

En un triángulo ABC, las bisectrices: interior de A y exterior de C, se intersecan en E; las bisectrices de los ángulos ABC y AEC, se intersecan en Q y determinan los puntos F y J en $\overline{AC}$. Demostrar que el triángulo FQJ es isósceles.

PROBLEMA Nº 139 (SEMINARIO 2007-II)

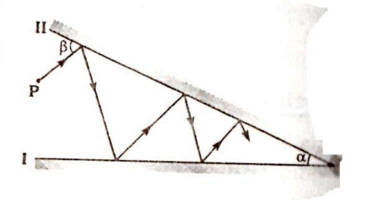
En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior BD. Si $m\measuredangle BAC > m\measuredangle BCA$.
Demostrar :

$$m\measuredangle BDC - m\measuredangle BDA = m\measuredangle BAC - m\measuredangle BCA$$

PROBLEMA Nº 140 (1er SEMINARIO 2007-II)

En la figura se muestran dos espejos planos I y II que forman un ángulo que mide α . Desde el punto P sale un rayo de luz que incide sobre el espejo II bajo un ángulo que mide β . Calcule la medida del ángulo de incidencia del rayo de luz sobre el espejo I cuando incide por tercera vez sobre este espejo. Considere que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

A) $6\alpha - \beta$
B) $4\alpha - \beta$
C) $3\alpha + \beta$
D) $6\alpha + \beta$
E) $5\alpha + \beta$



Problemas Resueltos
Ciclo Semestral

PROBLEMA Nº 141

Dado el triángulo equilátero ABC y P un punto en la región interior. Si AP=2 y PC=7, calcule el mayor valor entero de PB.

A) 11   B) 7   C) 8
D) 9   E) 10

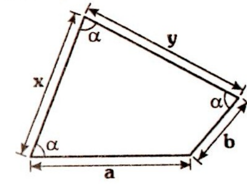
PROBLEMA Nº 142

En un triángulo rectángulo ABC se trazan las bisectrices interiores AP y CQ que cortan a la altura BH en M y N respectivamente. Si BP=a y BQ=b, (a > b) calcule MN.

A) $\frac{a+2}{2}$ B) $\sqrt{ab}$ C) $a-b$
D) $a-\frac{b}{2}$ E) $\frac{a-b}{2}$

PROBLEMA Nº 143

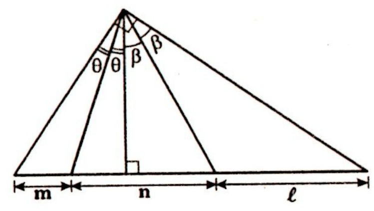
En el gráfico, $\alpha < 90°$, indica entre que valores esta **xy**.



A) $\langle ab;(a+b)^2\rangle$ B) $\left\langle 2ab;\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\rangle$
C) $\langle ab;(a^2+b)^2\rangle$ D) $\left\langle \frac{ab}{2};2(a+b)^2\right\rangle$
E) $\left\langle \frac{ab}{4};2(a+b)^2\right\rangle$

PROBLEMA Nº 144

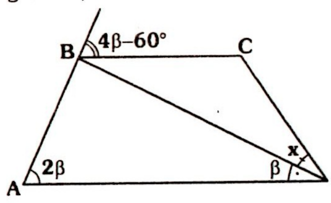
En el gráfico, indique la relación correcta:



A) $\ell = m + n$ B) $n^2 = m\ell$
C) $n^2 = 2m\ell$ D) $\ell^2 = m^2 + n^2$
E) $\ell = \sqrt{mn}$

PROBLEMA Nº 145

En el gráfico, AB=BC calcule **x**.



A) 30°   B) $\frac{45°}{2}$ C) 15°
D) $30° + \beta$ E) $30° - \beta$

PROBLEMA Nº 146

En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la ceviana interior BD, tal que: $2(m\sphericalangle DBC) = 3(m\sphericalangle BAC)$ y $AB = DC + BC$

Calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) 18° B) 30° C) 36°
D) 15° E) 32°

PROBLEMA Nº 147

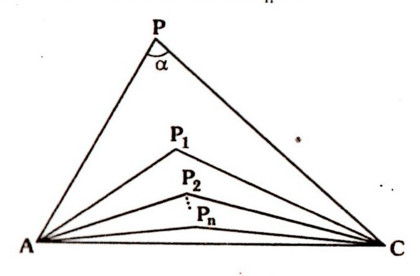
En un triángulo ABC, se ubica P en $\overline{AB}$ y Q en la prolongación de $\overline{AC}$. Si las bisectrices exteriores trazadas desde B y Q, en los triángulos ABC y APQ respectivamente se cortan en T; $\overline{PQ} \cap \overline{BC} = \{R\}$ y $m\sphericalangle BAC - m\sphericalangle PRB = 20°$.

Calcule $m\sphericalangle BTQ$.

A) 10° B) 40° C) 80°
D) 20° E) 70°

PROBLEMA Nº 148

En el gráfico, en el triángulo APC, $\overline{AP_1}$ y $\overline{CP_1}$ son bisectrices trazadas de A y C; en el triángulo AP_1C, $\overline{AP_2}$ y $\overline{CP_2}$ son bisectrices trazadas de A y C y asi sucesivamente. Calcule $m\sphericalangle AP_nC$.



A) $90° - \frac{1}{2^n}\alpha$ B) $90°\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{2^n}\alpha$

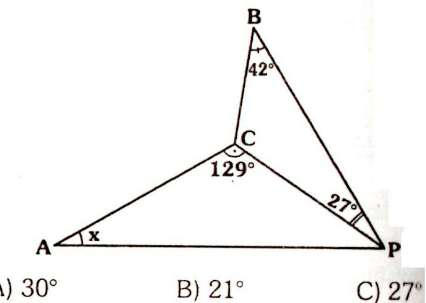
C) $180°\left(1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\alpha$

D) $180°\left[1-\frac{1}{2^n}\right]+\frac{1}{2^n}\alpha$

E) $90°\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{\alpha}{n}$

PROBLEMA Nº 149

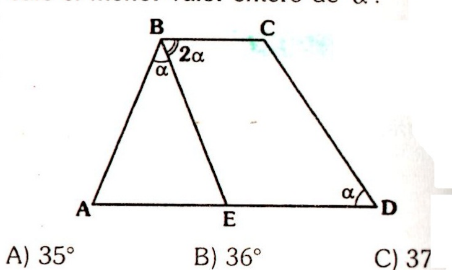
En el gráfico, BP=AC, calcule **x**.



A) 30° B) 21° C) 27°
D) 32° E) 42°

PROBLEMA Nº 150

En el gráfico, $\overline{BC} // \overline{AD}$ y $AB = ED$, calcule el menor valor entero de α.



A) 35° B) 36° C) 37
D) 44° E) 41°

PROBLEMA Nº 151

Del gráfico, calcule $x + y$.

A) 320° B) 160° C) 200°
D) 180° E) 220°

PROBLEMA Nº 152

Del gráfico, calcule **x**.

A) 10° B) 30° C) 20°
D) 35° E) 25°

PROBLEMA Nº 153

En el gráfico, $AD = DB = DE$. Calcule $\frac{a}{b}$

A) 1

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{1}{3}$

D) 2

E) $\frac{3}{2}$

PROBLEMA Nº 154

En un triángulo un lado mide 10, calcule el menor valor entero del perímetro de la región triangular.

A) 11 B) 12 C) 20
D) 19 E) 21

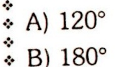
PROBLEMA Nº 155

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior CE y en $\overline{AC}$ se ubica D. Si $m\sphericalangle ABC = 100°$, $m\sphericalangle BAC = 20°$, AE=EC y EB=CD. Calcule $m\sphericalangle AED$

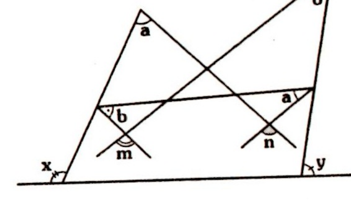
A) 100° B) 105° C) 120°
D) 115° E) 110°

PROBLEMA Nº 156

En el gráfico, $x + y = 220°$. Calcule $m + n$

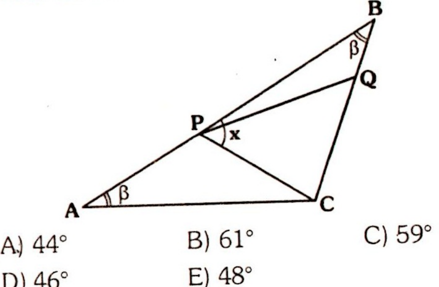


A) 120°
B) 180°
C) 140°
D) 150°
E) 160°



PROBLEMA Nº 157

En el gráfico, PB = QC. Calcule el menor valor entero de **x**.



A) 44° B) 61° C) 59°
D) 46° E) 48°

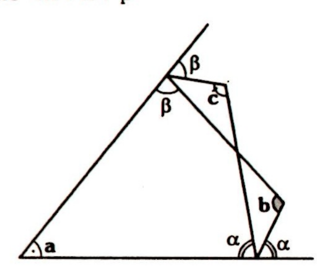
PROBLEMA Nº 158

En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BP}$, se ubica Q en $\overline{BC}$, tal que $AP = BQ$. Calcule el menor valor entero de $m\sphericalangle BQA$, si $m\sphericalangle ABC = 40°$.

A) 61° B) 71° C) 69°
D) 59° E) 89°

PROBLEMA Nº 159

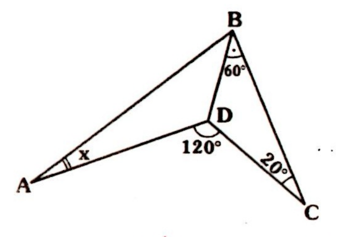
En el gráfico, se cumple :
$ma + nb + pc = 360°$; donde m, n y $p \in \mathbb{Z}^+$
Calcule $m + n + p$



A) 5 B) 4 C) 3
D) 6 E) 2

PROBLEMA Nº 160

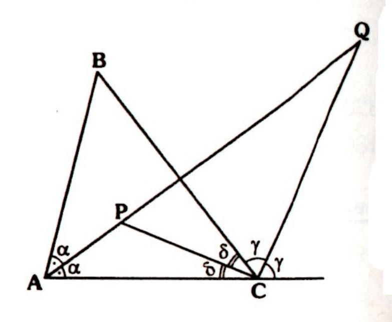
En el gráfico, AD=BC.
Calcule **x**.



A) 8° B) 10° C) 12°
D) 18° E) 15°

PROBLEMA Nº 161

En el gráfico, el triángulo ABC es acutángulo y $CQ = 7$. Calcule PQ, cuando PC toma su mayor valor entero.



A) $\sqrt{85}$ B) $\sqrt{75}$ C) 10
D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 162

En el triángulo obtusángulo ABC (obtuso en B) se traza la ceviana interior BM tal que el triángulo AMB es obtuso en M. Si $AB + AC = 10$. Calcule el mayor valor entero de AZ ($\overline{AZ}$ es ceviana interior del triángulo AMB).

A) 3 B) 4 C) 5
D) 2 E) 6

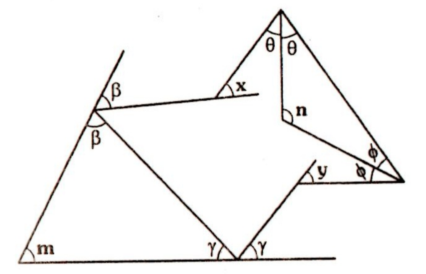
PROBLEMA Nº 163

El perímetro de una región triangular es k $(k \in \mathbb{Z}^+)$. Calcule el mayor valor entero del perímetro de la región triangular cuyos vértices están en los lados del triángulo inicial.

A) k B) 2k − 3 C) k − 1
D) 2k E) k + 1

PROBLEMA Nº 164

En el gráfico, $n - m = 60°$, calcule $x + y$.



A) 80° B) 140° C) 120°
D) 100° E) 130°

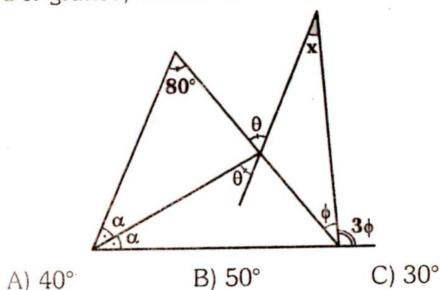
PROBLEMA Nº 165

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BM}$ y en el triángulo BMC se traza la ceviana interior MN tal que $AB = BM = MN = NC$. Si $m\sphericalangle ACB$ es máximo entero, calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) 66° B) 58° C) 61°
D) 62° E) 87°

PROBLEMA Nº 166

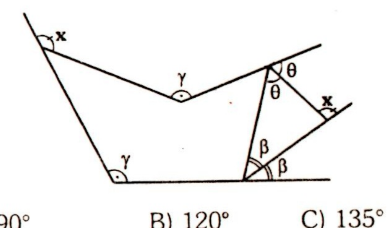
Del gráfico, calcule **x**.



A) 40° B) 50° C) 30°
D) 20° E) 25°

PROBLEMA Nº 167

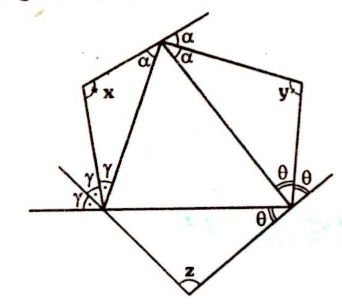
Del gráfico, calcule **x**.



A) 90° B) 120° C) 135°
D) 100° E) 108°

PROBLEMA Nº 168

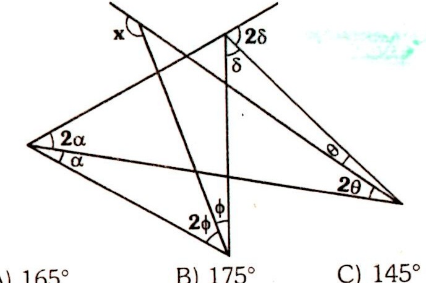
En el gráfico, calcule $x + y + z$



A) 300° B) 240° C) 270°
D) 320° E) 450°

PROBLEMA Nº 169

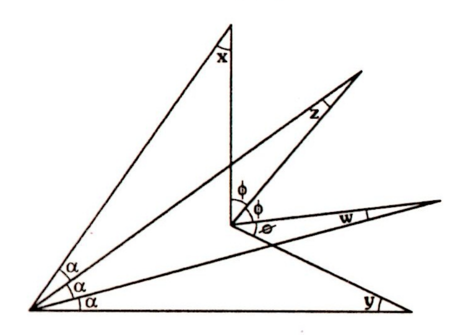
En el gráfico, $\alpha + \theta = 25°$
Calcule **x**.



A) 165° B) 175° C) 145°
D) 155° E) 140°

PROBLEMA Nº 170

Del gráfico, calcule $\frac{x+y}{z+w}$



A) 1 B) 3 C) 2

D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

PROBLEMA Nº 171

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BF, tal que AB=4;

$m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle ACB)$,

$m\measuredangle FBC = 3(m\measuredangle ACB)$

Calcule el valor entero de BF.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 5 E) 4

PROBLEMA Nº 172

En una región triangular isósceles se cumple que el perímetro es mayor que el triple de su base. Calcule el mayor valor entero de la medida del menor ángulo interior.

A) 44° B) 59° C) 89°

D) 61° E) 58°

PROBLEMA Nº 173

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y BN, las cuales se cortan en L. Si AM=MC, AB=BN y $m\measuredangle MLN = 2(m\measuredangle ABC)$.

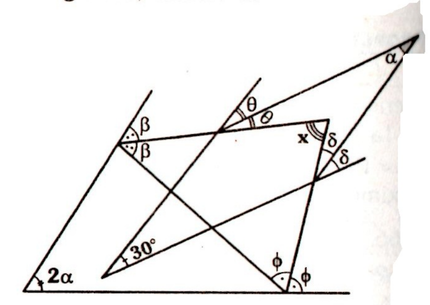
Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 60° C) 45°

D) 36° E) 72°

PROBLEMA Nº 174

En el gráfico, calcule **x**.



A) 45° B) 60° C) 80°

D) 70° E) 50°

PROBLEMA Nº 175

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), la altura BH y la ceviana interior CD se cortan en Q. Si AD=DC calcule el mayor valor entero de $m\measuredangle BQC$.

A) 91° B) 136° C) 121°

D) 134° E) 119°

PROBLEMA Nº 176

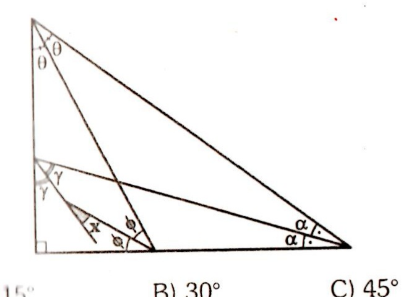
En el gráfico, PB=PC, calcule **x**.

A) 40° B) 50° C) 30°

D) 10° E) 20°

PROBLEMA Nº 177

Del gráfico, calcule **x**.



A) 15° B) 30° C) 45°

D) 45°/2 E) 53°/2

PROBLEMA Nº 178

En el triángulo isósceles ABC de base AC, se traza la ceviana interior CD y la bisectriz exterior $\overline{DE}$ del triángulo ADC. Si $m\measuredangle DEC = 19°$. Calcule $m\measuredangle DCB$

A) 38° B) 19° C) 79°

D) 61° E) 69°

PROBLEMA Nº 179

Se tiene un triángulo equilátero ABC, en $\overline{AC}$ y en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubican P y Q respectivamente, de tal manera que el triángulo BPQ es isósceles de base BP, si $\overline{BQ} // \overline{PC}$ y BP=BR.

Calcule $m\measuredangle ABP$ $(\overline{PQ} \cap \overline{BC} = \{R\})$

A) 30° B) 40° C) 50°

D) 32° E) 36°

PROBLEMA Nº 180

En el gráfico, calcule a – b, si $\overline{BE} // \overline{AD}$ y

$m\measuredangle EBT = m\measuredangle EBD$

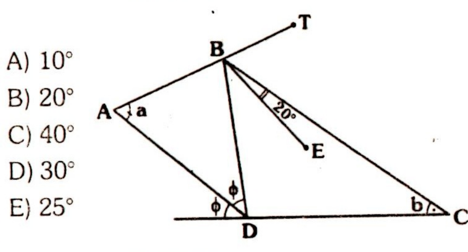
A) 10°

B) 20°

C) 40°

D) 30°

E) 25°



PROBLEMA Nº 181

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AM, en cuya prolongación se ubica D. Si BD=DC y

$3(m\measuredangle DAC) = 2(m\measuredangle BCA) = 6(m\measuredangle BCD) = 60°$

Calcule $m\measuredangle BAD$.

A) 45° B) 36° C) 30°

D) 20° E) 18°

PROBLEMA Nº 182

En el gráfico, calcule **x**.

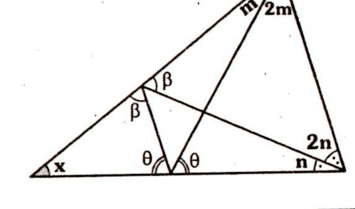
A) 36°

B) 60°

C) 45°

D) 30°

E) 54°



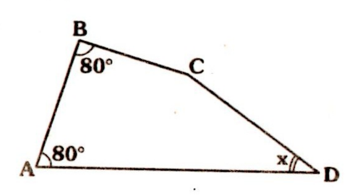
PROBLEMA Nº 183

En el triángulo ABC ($m\sphericalangle ABC = 90°$) se traza la altura BH y en ella se ubica P. Si $AC + AB = 10$, calcule el mayor valor entero de AP.

A) 4　　B) 3　　C) 5
D) 9　　E) 6

PROBLEMA Nº 184

En el gráfico, $AD > AB$ y $AB = BC = CD$. Calcule **x**.



A) 10°　　B) 20°　　C) 30°
D) 50°　　E) 40°

PROBLEMA Nº 185

En el triángulo ABC, se ubican en $\overline{AB}$ y en las regiones exteriores y relativas a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ los puntos P, Q y R respectivamente. Si $\overline{AC} \cap \overline{QR} = \{M\}$;

$m\sphericalangle BPQ = m\sphericalangle QMC$;

$m\sphericalangle RAC + m\sphericalangle BAR = 180°$ y

$m\sphericalangle MRA = 64°$

Calcule $m\sphericalangle PQR$.

A) 64°　　B) 56°　　C) 52°
D) 60°　　E) 32°

PROBLEMA Nº 186

En el gráfico, $m + n = 60°$. Calcule **x**.

A) 20°
B) 30°
C) 45°
D) 60°
E) 50°

PROBLEMA Nº 187

En los lados AB, BC y AC del triángulo ABC se ubican los puntos P, Q y R respectivamente. Si AR=RP; CR=RQ y $m\sphericalangle PRQ = 80°$. Calcule la medida del ángulo entre las bisectrices de los ángulos APQ y PQC.

A) 56°　　B) 40°　　C) 64°
D) 65°　　E) 50°

PROBLEMA Nº 188

En el triángulo ABC se trazan la ceviana interior BP y la ceviana exterior BQ (Q en la prolongación de $\overline{CA}$).

Si $m\sphericalangle BCA = 2(m\sphericalangle BQA) = 20°$;

$BC = AP + AB$　y　$QA = BC + AB$

Calcule $m\sphericalangle CBP$.

A) 10°　　B) 40°　　C) 60°
D) 20°　　E) 30°

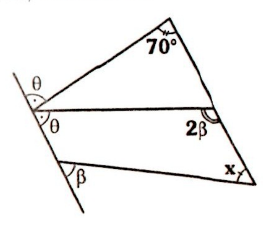
PROBLEMA Nº 189

En el gráfico, $a + b = 210°$
Calcule x.

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 20°
E) 18°

PROBLEMA Nº 190

Del gráfico, calcule **x**.



A) 70°　　B) 35°　　C) 40°
D) 55°　　E) 65°

PROBLEMA Nº 191

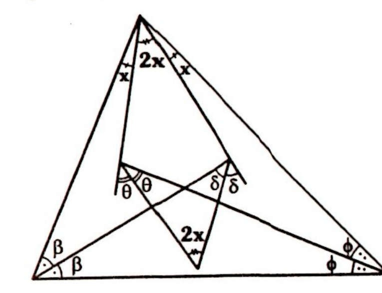
En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y CN de modo que $m\sphericalangle BNC = m\sphericalangle AMC$. Si la medida del menor ángulo determinado por las bisectrices de los ángulos ANC y AMC es igual a la medida del ángulo ABC.

Calcule $m\sphericalangle CBA$.

A) 36°　　B) 54°　　C) 60°
D) 45°　　E) 37°

PROBLEMA Nº 192

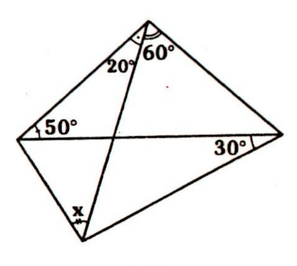
Del gráfico, calcule **x**.



A) 28°　　B) $\frac{45°}{2}$　　C) 24°
D) 20°　　E) 10°

PROBLEMA Nº 193

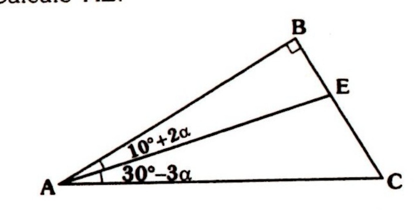
Del gráfico, calcule **x**.



A) 20°　　B) 40°　　C) 30°
D) 25°　　E) 35°

PROBLEMA Nº 194

En el gráfico, BE=a y EC=b.
Calcule AE.

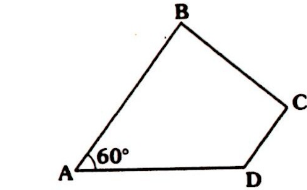


A) a + b　　B) 2a + b　　C) 2a − b
D) a + 2b　　E) 2b − a

PROBLEMA Nº 195

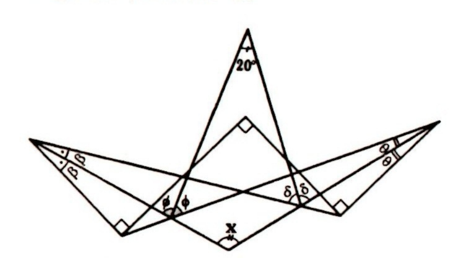
En el gráfico, $AB = AD = 17$, $CD = 8$ y el ángulo BCD es obtuso. Indique la cantidad de valores enteros para BC.

A) 1
B) 5
C) 3
D) 0
E) 4



PROBLEMA Nº 196

Del gráfico, calcule **x**.

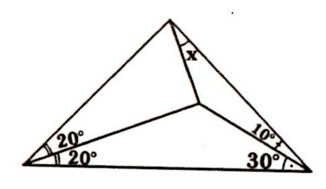


A) 160° B) 140° C) 130°

D) 155° E) 150°

PROBLEMA Nº 197

Del gráfico, calcule **x**.

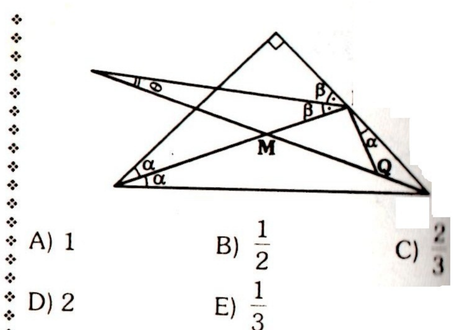


A) 5° B) 7,5° C) 10°

D) 20° E) 15°

PROBLEMA Nº 198

En el gráfico, MP = PQ. Calcule $\frac{\alpha}{\theta}$



A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$

D) 2 E) $\frac{1}{3}$

PROBLEMA Nº 199

En un triángulo ABC se ubica P en la región interior, tal que AP = AB = PC y

$$\frac{m\sphericalangle PCB}{3} = \frac{m\sphericalangle PAC}{2} = \frac{m\sphericalangle ABC}{13}$$

Calcule $m\sphericalangle PAC$.

A) 10° B) 12° C) 20°

D) 18° E) 22,5°

PROBLEMA Nº 200

El perímetro de un triángulo rectángulo es 30. ¿Cuántos valores enteros puede tener la longitud de la hipotenusa?

A) 0 B) 3 C) 2

D) 4 E) 5

Problemas Resueltos

Ciclo Semestral Intensivo

PROBLEMA Nº 201

Se tiene un triángulo en el cual un lado mide 1 y la medida del mayor ángulo exterior es β. Si las longitudes de los lados son enteras calcule la medida del menor ángulo exterior.

A) β B) 360° − 2β

C) 90° − β D) $180° - \frac{\beta}{2}$

E) 180° − β

PROBLEMA Nº 202

En el gráfico, PC = 18, indique cuántos valores enteros puede tener AB.

A) 0

B) 2

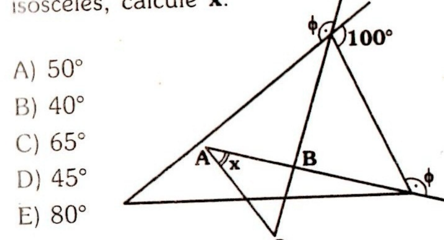
C) 3

D) 1

E) 5

PROBLEMA Nº 203

En el gráfico, el triángulo ABC es isósceles, calcule **x**.



A) 50°

B) 40°

C) 65°

D) 45°

E) 80°

PROBLEMA Nº 204

¿Cuántos triángulos de longitudes enteras cuyo perímetro es 40u existen?

A) 30 B) 32 C) 33

D) 34 E) 35

PROBLEMA Nº 205

En el gráfico, ED = DF, calcule el mayor valor entero de α.

A) 44° B) 18° C) 31°

D) 17° E) 29°

PROBLEMA Nº 206

En el triángulo ABC, se ubican P y Q en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente tal que:

$$AB = BP = PQ = QC$$

Si $m\sphericalangle ABC = 5(m\sphericalangle QPC)$

Calcule $m\sphericalangle QPC$.

A) 10° B) 18° C) 15°
D) 12° E) 20°

PROBLEMA Nº 207

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la ceviana interior BF tal que AC=16 y

$$m\measuredangle ABF = 90° - 3(m\measuredangle ACB)$$

Calcule el menor valor entero de BF.

A) 4 B) 6 C) 5
D) 7 E) 9

PROBLEMA Nº 208

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores BD y CP secantes en R, tal que:

$$m\measuredangle PCB = 3(m\measuredangle PBD),$$

$$m\measuredangle DBC = 3(m\measuredangle PCD) \text{ y}$$

$$m\measuredangle DPR = m\measuredangle RDP = m\measuredangle BAC$$

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 54° B) 72° C) 36°
D) $\frac{540°}{11}$ E) $\frac{540°}{13}$

PROBLEMA Nº 209

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BM de modo que AM=BC.

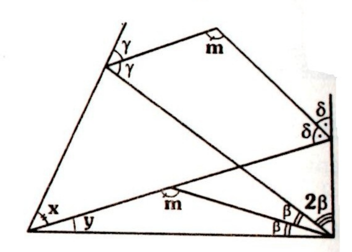
Si : $\frac{m\measuredangle BAM}{3} = \frac{m\measuredangle BCM}{2} = 10°$

Calcule $m\measuredangle CBM$.

A) 10° B) 15° C) 18°
D) 25° E) 20°

PROBLEMA Nº 210

En el gráfico, calcule $\frac{x}{y}$



A) 1 B) 2 C) 3
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

PROBLEMA Nº 211

En el triángulo ABC en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ se ubica D, Si BC=CD,

$$m\measuredangle BCA = 60° - \theta \quad \text{y}$$

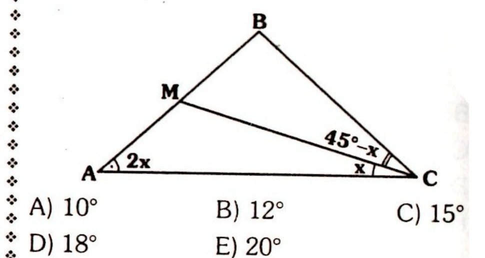
$$m\measuredangle ADC = 2(m\measuredangle CAD) = 2\theta$$

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 15° B) 45° C) 30°
D) 37° E) 60°

PROBLEMA Nº 212

En el gráfico, AM=MB. Calcule **x**.



A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 213

Se tiene el triángulo ABC, se ubica P en la región exterior relativa a $\overline{AB}$, tal que BC=BP, $m\measuredangle ACB = 54°$,

$$m\measuredangle ABC = 3(m\measuredangle ABP) = 99°$$

Calcule $m\measuredangle APC$.

A) 93° B) 92° C) 90°
D) 91° E) 94°

PROBLEMA Nº 214

En el triángulo ABC se ubica P en la región interior. Si BC=PC=15 y AP=8. Calcule el menor valor entero de AC.

A) 16 B) 17 C) 18
D) 22 E) 23

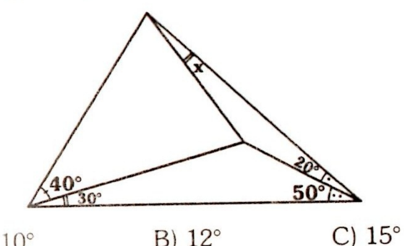
PROBLEMA Nº 215

En el triángulo ABC($m\measuredangle ABC = 90°$) se traza la altura BH y en ella se ubica P. Se ubica T en la región exterior relativa a $\overline{AC}$, tal que $m\measuredangle ACT = 90°$. Si AP=2 y AT=6. Calcule el valor entero de BM, siendo M punto medio de $\overline{AC}$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 216

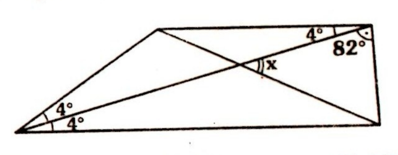
Del gráfico, calcule **x**.



A) 10° B) 12° C) 15°
D) 9° E) 18°

PROBLEMA Nº 217

En el gráfico, calcule **x**.



A) 8° B) 10° C) 12°
D) 15° E) 9°

PROBLEMA Nº 218

En el triángulo rectángulo ABC (reto en B), se ubica Q en $\overline{AC}$ tal que $m\measuredangle QBC = 3x$, $m\measuredangle BAC = 2x$ y AB=CQ. Calcule **x**.

A) 15° B) 16° C) 18°
D) 22°30' E) 26°30'

PROBLEMA Nº 219

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BM, tal que AB=CM y

$$\frac{m\measuredangle BAM}{4} = \frac{m\measuredangle BCM}{3} = 10°$$

Calcule $m\measuredangle MBC$.

A) 30° B) 40° C) 50°
D) 35° E) 55°

PROBLEMA Nº 220

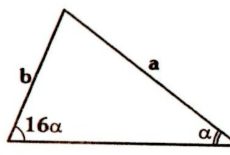
En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BQ tal que QC=AB, $m\measuredangle BAC = 20°$ y $m\measuredangle BQC = 30°$.

Calcule $m\measuredangle BCA$.

A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 70°

PROBLEMA Nº 221

Del gráfico, indique la alternativa correcta:



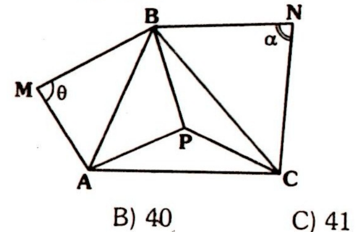
A) $a < 16b$ B) $a = 16b$

C) $a > 16b$ D) $b < 16a$

E) $b > 16a$

PROBLEMA Nº 222

En el gráfico $MB = NC = 12$, $AC = 15$, $BN = 9$, $\alpha < 90°$ y $\theta > 90°$. Si AB y BC toman su menor y mayor valor entero respectivamente. Calcule el mayor valor entero de $PA + PB + PC$.



A) 39 B) 40 C) 41
D) 27 E) 38

PROBLEMA Nº 223

En el triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$, las cuales se cortan en I, las bisectrices de los ángulos ANC y AIC se cortan en P, de modo que $m\sphericalangle IAC = m\sphericalangle ICA + m\sphericalangle NPI$. Si la medida del menor ángulo entre $\overrightarrow{PI}$ y $\overrightarrow{BC}$ es 40°. Calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 50°

PROBLEMA Nº 224

Dado el triángulo ABC, se ubica D y F en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si AD=AC y $m\sphericalangle DAF = \dfrac{m\sphericalangle FAC}{5} = \dfrac{m\sphericalangle ABC}{4} = 10°$. Calcule $m\sphericalangle DFA$.

A) 20° B) 30° C) 35°
D) 25° E) 45°

PROBLEMA Nº 225

En el triángulo ABC, se traza una recta que corta a $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ y a la prolongación de $\overline{CA}$ en S, Q y P respectivamente.

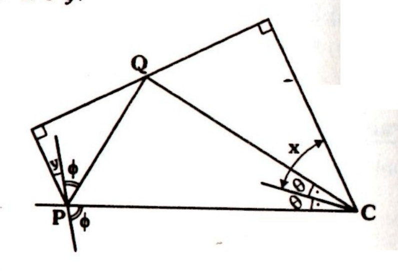
Si: $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle BSQ = 2(m\sphericalangle ACB)$ y

$SC - PQ = QB$. Calcule $m\sphericalangle ACB$

A) 30° B) 36° C) 72°
D) 60° E) 45°

PROBLEMA Nº 226

Del gráfico, calcule $m\sphericalangle PQC$ en función de **x** e **y**.



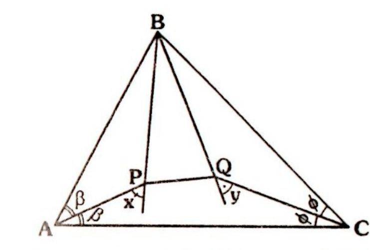
A) $x + y$ B) $2(x + y)$

C) $\dfrac{(x+y)}{2}$ D) $180° - \dfrac{(x+y)}{2}$

E) $90° - \dfrac{(x+y)}{2}$

PROBLEMA Nº 227

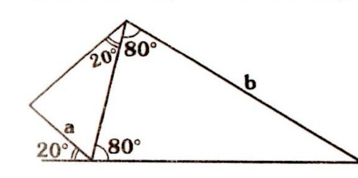
En el gráfico, $m\sphericalangle ABC - 2(m\sphericalangle PBQ) = 20°$. Calcule $x + y$.



A) 100° B) 105° C) 120°
D) 110° E) 115°

PROBLEMA Nº 228

En el gráfico, indique el intervalo para $\dfrac{b}{a}$



A) $\langle 8;10 \rangle$ B) $[1;3\rangle$ C) $\langle 2;3 \rangle$
D) $\langle 4;9 \rangle$ E) $\langle 3;6 \rangle$

PROBLEMA Nº 229

Se tiene el triángulo ABC, P es un punto interior y S es exterior y relativo a $\overline{AC}$, tal que $\overline{PS} \cap \overline{AC} = \{L\}$,

$$m\sphericalangle PLC - m\sphericalangle PLA = 20°$$

Si: $\dfrac{m\sphericalangle BAP}{m\sphericalangle PAC} = \dfrac{m\sphericalangle BCP}{m\sphericalangle PCA} = 4$ y

$$\frac{m\sphericalangle ABS}{m\sphericalangle SBC} = \frac{m\sphericalangle APS}{m\sphericalangle SPC} = 1$$

Calcule $m\sphericalangle BSP$

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 60°

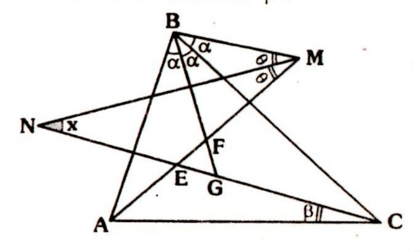
PROBLEMA Nº 230

En el gráfico, $EF = EG$,

$m\sphericalangle CAM = 3(m\sphericalangle MAB)$ y

$m\sphericalangle BCN = 3(m\sphericalangle NCA)$

Calcule **x** en función de β.



A) β B) $45° + \beta$ C) $90° - \dfrac{\beta}{2}$

D) $45° - \dfrac{\beta}{2}$ E) $60° - \beta$

PROBLEMA Nº 231

Se ubica P en la región interior del triángulo equilátero ABC, tal que AP=2 y PC=7. Calcule la razón entre los perímetros máximo y mínimo enteros del triángulo ABC.

A) 13/11 B) 12/11 C) 4/3
D) 6/5 E) 7/6

PROBLEMA Nº 232

En el triángulo ABC, se ubica M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $14(m\sphericalangle NAM) = 7(m\sphericalangle NAC) = 2(m\sphericalangle ACB)$ $AM = MN = NC$. Calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) 36° B) 18° C) 24°
D) 30° E) 27°

PROBLEMA Nº 233

En el triángulo $ABC(AB = BC)$, las cevianas interiores AQ y CP se intersecan en L, tal que $m\sphericalangle AQC = 2(m\sphericalangle ACP)$, entonces se puede afirmar:

A) $AL > AP$ B) $AL > PL$
C) $AL < AP$ D) $AP = AL$
E) $LP = AP$

PROBLEMA Nº 234

En el gráfico, $AB=BE$. Calcule **x**.

A) 15°
B) 20°
C) 30°
D) 25°
E) 18°

PROBLEMA Nº 235

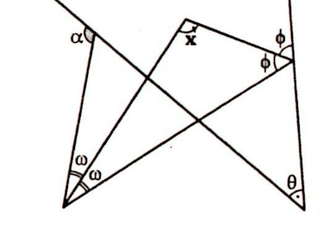
Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica E en $\overline{AB}$ y G en la prolongación de $\overline{BC}$. Si $\overline{EG} \cap \overline{AC} = \{F\}$ y los triángulos AEF y FCG son isósceles. Calcule $m\sphericalangle GEB$.

A) 30° B) 60° C) 45°
D) 50° E) 37°

PROBLEMA Nº 236

En el gráfico, $\alpha + \theta < 170°$. Calcule el menor valor entero de **x**.

A) 90°
B) 94°
C) 98°
D) 96°
E) 97°



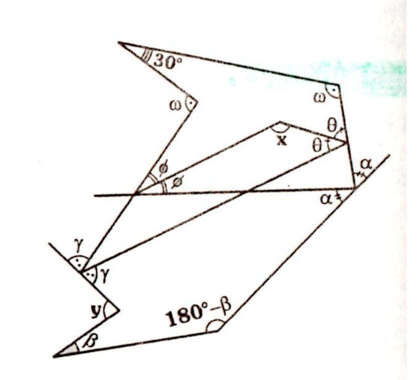
PROBLEMA Nº 237

Se tiene el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, una recta corta a $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y a la prolongación de $\overline{BA}$ en P, Q y R respectivamente. Si $m\sphericalangle BPQ = a$ y $m\sphericalangle AQR = b$. Calcule $m\sphericalangle BRP$.

A) $a-b$ B) $a+b$ C) $2a-b$
D) $a-2b$ E) $3a-b$

PROBLEMA Nº 238

Del gráfico calcule $x+y$.



A) 240° B) 215° C) 190°
D) 210° E) 220°

PROBLEMA Nº 239

En el triángulo ABC se ubica P en la región interior tal que:

$$\frac{m\sphericalangle PCA}{4} = \frac{m\sphericalangle PAC}{3} = \frac{m\sphericalangle PAB}{2} = m\sphericalangle PCB = 10°$$

Calcule $m\sphericalangle PBC$.

A) 28° B) 20° C) 15°
D) 30° E) 10°

PROBLEMA Nº 240

En el triángulo ABC se ubican P y Q (Q en $\overline{PC}$) en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubican M y N tal que $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ son parte de las bisectrices exteriores trazadas desde B y C. Si $\overline{AQ}$ es bisectriz interior, $\overline{AQ} // \overline{MP}$ y $\overline{NP} // \overline{AC}$.

Calcule $m\sphericalangle BMP + m\sphericalangle PNC$.

A) 45° B) 60° C) 75°
D) 120° E) 90°

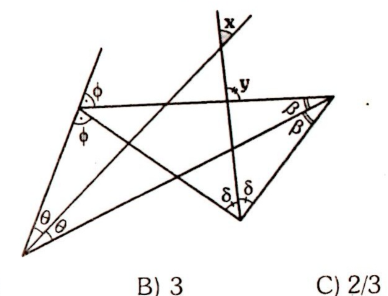
PROBLEMA Nº 241

La bisectriz interior trazada en un triángulo escaleno determina con el lado opuesto ángulos cuya razón de medidas es 7/13. Si los tres ángulos interiores son menores que 80°. Calcule la medida del menor ángulo interior del triángulo dado.

A) 79° B) 78° C) 25°
D) 24° E) 76°

PROBLEMA Nº 242

Del gráfico, calcule $\frac{x}{y}$



A) 2 B) 3 C) 2/3
D) 1/2 E) 3

PROBLEMA Nº 243

Se tiene el triángulo ABC $(AB = BC)$, se ubican S y K en las prolongaciones de $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $\overline{CS}$ divide al ángulo ACK en la razón de 2 a 3. Calcule el mayor valor entero de $m\sphericalangle ABC$.

A) 77° B) 74° C) 76°
D) 68° E) 60°

PROBLEMA Nº 244

Se tiene el triángulo ABE, en la prolongación de $\overline{AE}$ se ubica C, luego ubicamos D en $\overline{AB}$. Si $m\sphericalangle BEC = 120°$ y $AB=AC=CD$.

Calcule la cantidad de valores enteros para $m\sphericalangle ABE$.

A) 18 B) 17 C) 29
D) 19 E) 28

PROBLEMA Nº 245

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AB, OQ y BR, tal que $AP = CQ = BR$, si "p" es el semiperímetro de la región ABC, indique el intervalo para CQ.

A) $\left\langle \frac{p}{3};p \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{p}{2};2p \right\rangle$ C) $[p\,;\,3p\rangle$
D) $\langle p;3p \rangle$ E) $\left\langle \frac{p}{3};2p \right\rangle$

PROBLEMA Nº 246

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B) se traza la ceviana interior AQ. Si $BQ = 2$, $QC = 3$ y

$$2(m\sphericalangle CAQ) + 3(m\sphericalangle BAQ) = 90°$$

Calcule AQ.

A) 8 B) 7 C) 5
D) 4 E) 6

PROBLEMA Nº 247

En la región exterior relativa a $\overline{AC}$ del triángulo ABC, se ubica D tal que

$$\frac{m\measuredangle ABD}{6}=\frac{m\measuredangle ADB}{15}=\frac{m\measuredangle BDC}{14}=\frac{m\measuredangle DBC}{8}=5°$$

Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{AC}$.

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 80° E) 85°

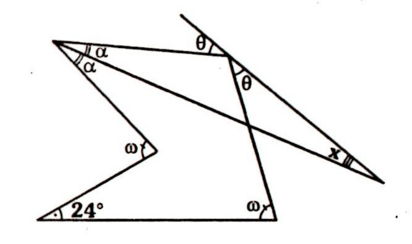
PROBLEMA Nº 248

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BN y en el triángulo ANB se traza la ceviana interior NM. Si $2(m\measuredangle BNC)=3(m\measuredangle MNB)$, AM=AN y NB=BC. Calcule el número de valores enteros de $m\measuredangle BNM$.

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

PROBLEMA Nº 249

Del gráfico, calcule **x**.



A) 10° B) 24° C) 18°
D) 36° E) 12°

PROBLEMA Nº 250

En el gráfico, AD=BC, calcule **y**.

A) 5°
B) 10°
C) 8°
D) 15°
E) 6°

PROBLEMA Nº 251

En el triángulo ABC se ubica P en la región exterior relativa a $\overline{BC}$, tal que AB=c; CP=ℓ; $m\measuredangle BAC=2(m\measuredangle BCA)$ y $m\measuredangle CBP=2(m\measuredangle BPC)$. Entonces se cumple:

A) $\ell=4c$ B) $\ell<c$ C) $4\ell<c$
D) $\ell<4c$ E) $2\ell<c$

PROBLEMA Nº 252

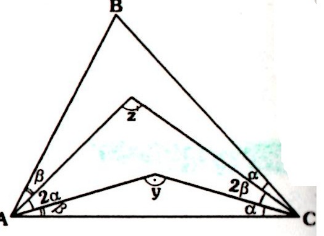
En el triángulo ABC(AB=BC) se traza la altura CH y la bisectriz interior AM, tal que $m\measuredangle ABC$ es el doble de la medida del ángulo determinado por las bisectrices de los ángulos HCB y AMB. Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 50° C) 40°
D) 80° E) 60°

PROBLEMA Nº 253

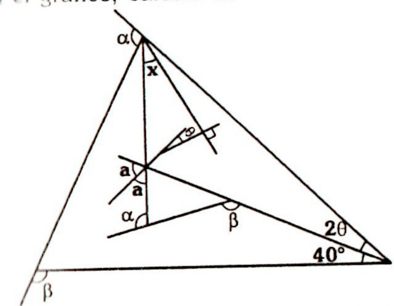
En el gráfico, el triángulo ABC es acutángulo. Calcule el mayor valor entero de y+z.

A) 269°
B) 271°
C) 241°
D) 259°
E) 239°



PROBLEMA Nº 254

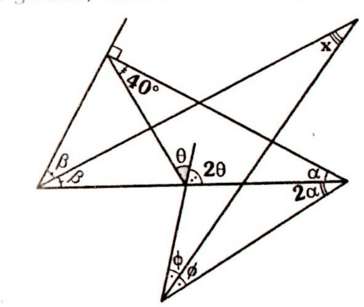
En el gráfico, calcule **x**.



A) 40° B) 50° C) 30°
D) 25° E) 20°

PROBLEMA Nº 255

Del gráfico, calcule **x** en función de β.



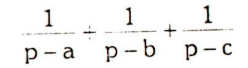
A) $\frac{320°-5\beta}{3}$ B) $110°-3\beta$

C) $\frac{320°-4\beta}{3}$ D) $\frac{320°-7\beta}{3}$

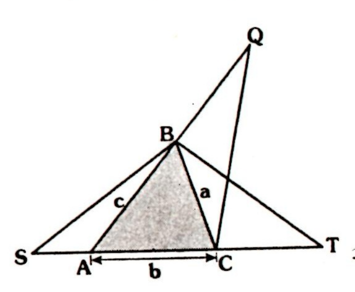
E) $\frac{5\beta-220°}{3}$

PROBLEMA Nº 256

En el gráfico, el semiperímetro de la región sombreada es P, si $(BS)(BT)(CQ)=\frac{1}{k^3}$ y k es entero, calcule el menor valor entero de:



$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}$$

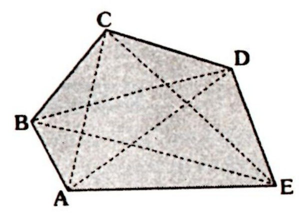


A) k−1 B) 3k−1
C) 3k+1 D) 2k−1
E) 2k+1

PROBLEMA Nº 257

En el gráfico, el perímetro de la región sombreada es ℓ, AB=a y AE=m si AE>ED>DC>CB>BA. Indique el intervalo de:

$$AC+BD+CE+DA+EB$$



A) $\langle m;\ell+a\rangle$ B) $[m-a;2\ell]$
C) $\langle 2m;2\ell]$ D) $\langle 2m-2a;2\ell\rangle$
E) $\langle m;2\ell+a\rangle$

PROBLEMA Nº 258

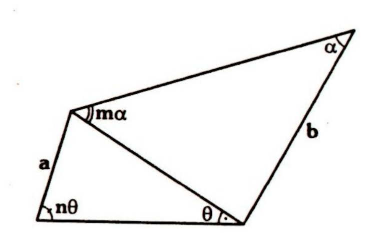
Se tiene el triángulo ABC(AB=BC), se ubican M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectiva-

mente tal que $AM=4$ y $CN=3$. Calcule el mayor valor entero de $AN+CM$.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 7

PROBLEMA Nº 259

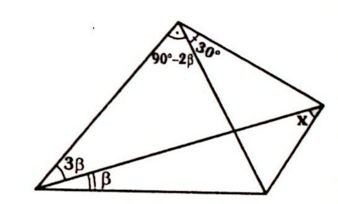
En el gráfico, indique la relación correcta, si n y $m\in\mathbb{Z}^+$.



A) $b<mna$ B) $a<mn+b$
C) $b>mna$ D) $a>mnb$
E) $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$

PROBLEMA Nº 260

Del gráfico, calcule **x**.



A) 10° B) 15° C) 30°
D) 22°30' E) 45°

Problemas Resueltos
Ciclo Repaso

PROBLEMA Nº 261

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Ocho puntos del espacio son vértices como máximo de 56 triángulos.

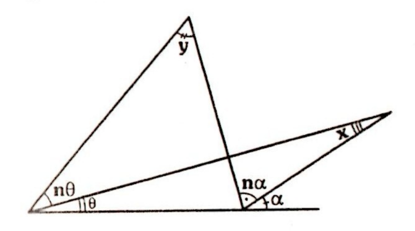
II. Si los lados de un triángulo miden 2, $\sqrt{7}$ y 4, entonces dicho triángulo es obtusángulo.

III. Todo triángulo escaleno es oblicuángulo.

A) VFV B) VFF C) FFF
D) VVF E) FVF

PROBLEMA Nº 262

Del gráfico, calcule **x**.

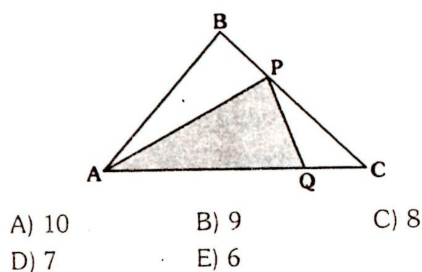


A) $\frac{y}{n}$ B) $\frac{y}{n+1}$ C) $\frac{y}{n-1}$

D) $\frac{y}{8-n}$ E) $\frac{y}{2n-1}$

PROBLEMA Nº 263

En el gráfico, AB=BC y el perímetro de la región sombreada es 20. Calcule el mayor valor entero de PC.



A) 10 B) 9 C) 8
D) 7 E) 6

PROBLEMA Nº 264

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la ceviana interior BM y en el triángulo BMC se traza la bisectriz interior CN. Si AB=AM, calcule $m\measuredangle CNM$.

A) 30° B) 60° C) 30°
D) 45° E) 22°30'

PROBLEMA Nº 265

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CP, luego en el triángulo APC se traza la ceviana interior AM en cuya prolongación se ubica N tal que:

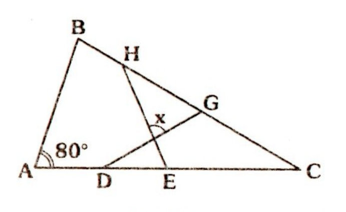
$m\measuredangle MAP=3(m\measuredangle MAC)$; $m\measuredangle ABC=40°$ y

$m\measuredangle BCN=90°-\frac{3}{4}(m\measuredangle ACB)$

Calcule $m\measuredangle CNM$

A) 40° B) 60° C) 50°
D) 45° E) 55°

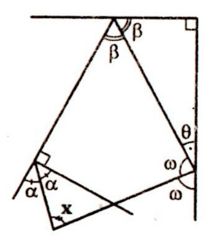
Calcule: **x**.



A) 70° B) 80° C) 60°
D) 100° E) 90°

PROBLEMA Nº 280

Del gráfico, calcule "x" en función de θ.



A) $90° - \frac{2}{3}\theta$ B) $45° + \frac{3}{2}\theta$

C) $45° + \theta$ D) $90° - \frac{3}{2}\theta$

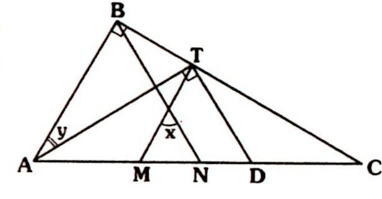
E) $90° - \frac{\theta}{2}$

PROBLEMA Nº 281

En el gráfico MT=MD y BN=NC.

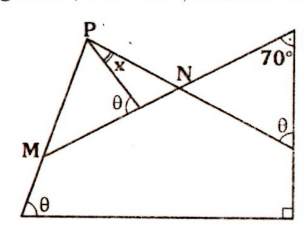
Calcule $\frac{x}{y}$.

A) 0,5
B) 1,5
C) 1
D) 2
E) 3



PROBLEMA Nº 282

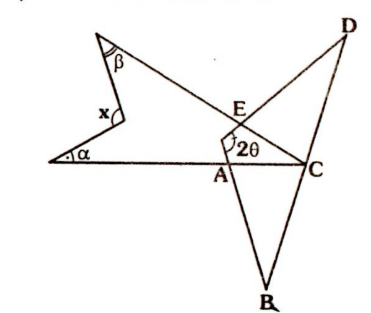
En el gráfico, MP=PN, calcule $x + \theta$.



A) 80° B) 85° C) 95°
D) 120° E) 110°

PROBLEMA Nº 283

En el gráfico, AB=BC y CD=DE y $\alpha + \beta - \theta = 70°$. Calcule **x**.



A) 160° B) 130° C) 170°
D) 100° E) 110°

PROBLEMA Nº 284

En un triángulo isósceles de base BC (AB > BC), se traza la bisectriz exterior BP y en el triángulo BPC se traza la bisectriz interior PQ. Si BP=9 y QC = 3. Calcule PC.

A) 4,5 B) 5,5 C) 6
D) 5 E) 4

PROBLEMA Nº 285

En un triángulo ABC, se ubica D en la región interior, tal que AD=BC, m∢ADC = 120°, m∢DBC = 66° y m∢DCB = 16°. Calcule m∢ABD

A) 40° B) 45° C) 30°
D) 25° E) 20°

PROBLEMA Nº 286

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BP y la bisectriz interior CN, de tal manera que los ángulos ABP y ABC son suplementarios. Si m∢BNC es el mayor valor entero par. Calcule m∢BPA

A) 8° B) 4° C) 10°
D) 3° E) 2°

PROBLEMA Nº 287

En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior BP, si AB=3, BC=4 y AC toma su mayor valor entero, calcule el mayor valor de (AP)(PC).

A) 36 B) 35 C) 9
D) 12 E) 18

PROBLEMA Nº 288

En el triángulo ABC, la altura BH y la bisectriz interior AM se cortan en Q. Si BQ=BM, calcule m∢ABC.

A) 60° B) 120° C) 90°
D) 75° E) 135°

PROBLEMA Nº 289

En el triángulo APC, la bisectriz interior desde A y la exterior de C, se cortan en P_1; en el triángulo AP_1C, se hace el mismo procedimiento y se encuentra P_2 y así sucesivamente. Si m∢APC = θ. Calcule la suma límite de las medidas de los menores ángulos en P_1; P_2; P_3 ...

A) θ B) 2θ C) θ/2
D) 3θ E) θ/4

PROBLEMA Nº 290

En el triángulo ABC, se ubica P y Q en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ si AB=AQ=AP; PC > PQ y m∢BAC = 40°. Calcule el mayor entero de m∢PCB.

A) 39° B) 41° C) 19°
D) 21° E) 20°

PROBLEMA Nº 291

En el triángulo ABC se cumple m∢ABC − m∢BCA = 40°. Se ubica P en la región interior, tal que:

m∢ABP = 3(m∢PBC) y

m∢ACP = 3(m∢BCP)

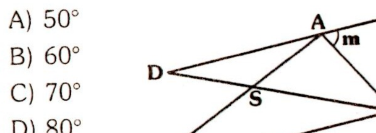
Calcule la medida del ángulo entre las bisectrices de los ángulos BPC y BAC.

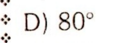
A) 20° B) 30° C) 25°
D) 15° E) 32°

PROBLEMA Nº 292

En el gráfico, AB=BC, SD=SA y SE=SC, calcule **x**.

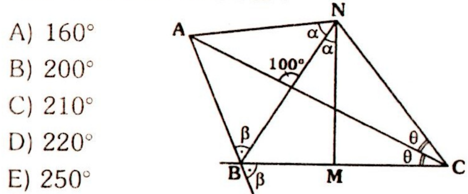
A) 50°
B) 60°
C) 70°
D) 80°
E) 65°





PROBLEMA Nº 293

En el gráfico $m\measuredangle BNC = 2(m\measuredangle NAC)$, calcule $m\measuredangle ABC + m\measuredangle NMB$.



A) 160°
B) 200°
C) 210°
D) 220°
E) 250°

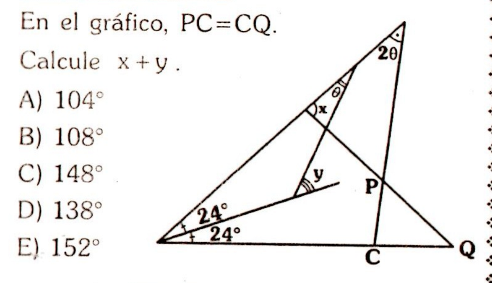
PROBLEMA Nº 294

En el triángulo equilátero ABC se ubica en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ los puntos E, F y D respectivamente si $m\measuredangle EDF = 90°$, BF=BD y EB=ED. Calcule $m\measuredangle AED$.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 60°

PROBLEMA Nº 295

En el gráfico, PC=CQ.
Calcule $x + y$.



A) 104°
B) 108°
C) 148°
D) 138°
E) 152°

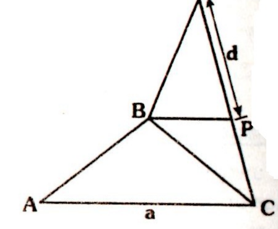
PROBLEMA Nº 296

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y CN de modo que $m\measuredangle BNC = m\measuredangle AMC$. En el triángulo BNC las bisectrices interiores se cortan en I, mientras que en el triángulo AMC la bisectriz interior trazado de A y la exterior trazada de C se cortan en J. Calcule: $m\measuredangle BIC - m\measuredangle AJC$.

A) 45° B) 90° C) 60°
D) 155° E) 18°

PROBLEMA Nº 297

En el gráfico los triángulos ABC; BPC y BQP son isósceles de bases $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y $\overline{BP}$ respectivamente, indique la relación correcta:



A) $4a > d$
B) $a < 8d$
C) $2a < d$
D) $4a < d$
E) $8a < d$

PROBLEMA Nº 298

En el triángulo ABC, se traza la bisectriz interior AM, en $\overline{AC}$ se ubica N, tal que MC=NC y $m\measuredangle ABC + m\measuredangle AMN = 150°$. Calcule $m\measuredangle ABC - m\measuredangle NMA$.

A) 60° B) 50° C) 30°
D) 75° E) 45°

PROBLEMA Nº 299

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BM y en su prolongación se ubica D, tal que AB=BC=CD. Si $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, calcule $m\measuredangle CMD$.

A) 30° B) 36° C) 45°
D) 60° E) 75°

PROBLEMA Nº 300

En el triángulo ABD se ubica el punto Q en la región exterior relativa a $\overline{BD}$, tal que AD=DQ, $m\measuredangle BAQ = 30°$, $m\measuredangle ABD = 18°$ y $m\measuredangle BDQ = 42°$. Calcule $m\measuredangle DBQ$.

A) 20° B) 15° C) 16°
D) 30° E) 25°

Geometría

SOLUCIONARIO

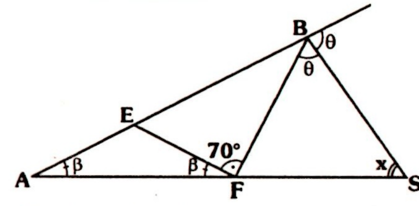
- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

TRIÁNGULOS



Solucionario Ciclo Anual

Resolución Nº 01



- Se nos pide: x
- Por dato AE = EF ⇒ ΔAEF es isósceles completando ángulos:

$$m\sphericalangle EAF = m\sphericalangle AFE = \beta$$

- Por ángulo exterior:

En ΔABS: $x + \beta = \theta$ ...(I)

En ΔBSF: $x + \theta = 70° + \beta$ ...(II)

- Sumando (I) y (II):

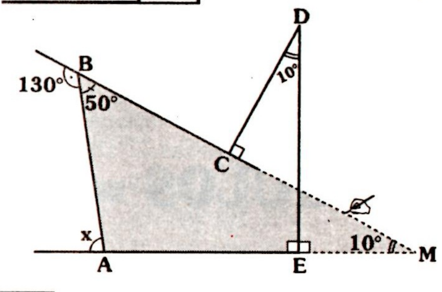
$$2x + \cancel{\theta + \beta} = 70° + \cancel{\theta + \beta}$$

$$\Rightarrow \; 2x = 70°$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 35°}$$

Clave C

Resolución Nº 2



- Se nos pide: x
- Para observar un triángulo donde "x" sea la medida de un ángulo exterior, se prolonga $\overline{BC}$ y $\overline{AE}$ ⇒ se tiene el ΔABM.
- En ∡ por teorema:

$$m\sphericalangle EMC + 90° = 10° + 90° \Rightarrow m\sphericalangle EMC = 10°$$

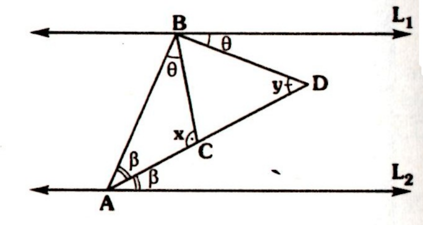
- En Δ ABM, por ángulo exterior:

$$x = 50° + 10°$$

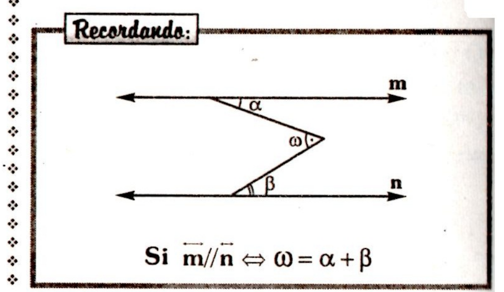
$$\therefore \; \mathbf{x = 60°}$$

Clave C

Resolución Nº 3



- Se nos pide: x + y



- Luego: $y = \theta + \beta$
- En ΔABC:

$$x + \underbrace{\theta + \beta}_{y} = 180°$$

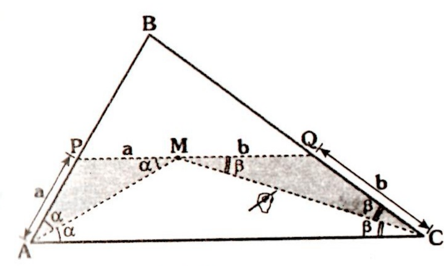
$$\therefore \; \mathbf{x + y = 180°}$$

Clave D

Resolución Nº 4

El primer paso es graficar de acuerdo a las condiciones, para ello lee detenidamente y bosquejalo.

- Así tenemos:



- Se nos pide PQ.
- Dato: a + b = 6
- Como $\overline{PQ} // \overline{AC}$ ⇒ por ángulos alternos internos:

$$m\sphericalangle PMA = \alpha \;\; y \;\; m\sphericalangle CMQ = \beta$$

- Luego:

ΔAPM y ΔMQC : isósceles

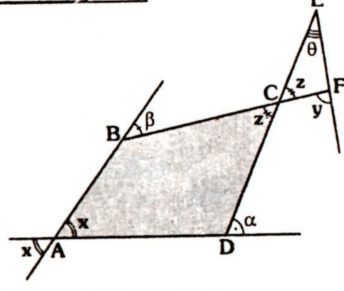
$$\Rightarrow PM = a \quad y \quad MQ = b$$

$$\Rightarrow PQ = a + b$$

$$\therefore \; \mathbf{PQ = 6}$$

Clave D

Resolución Nº 5



- Se nos pide: $\alpha + \beta + \theta$
- Tenemos como dato: $x + y = 80°$
- En ⏢, por teorema:

$\alpha + \beta = x + z$ ... (I)

- En ΔCEF, por ángulo exterior

$\theta + z = y$ ... (II)

- Sumando (I) y (II):

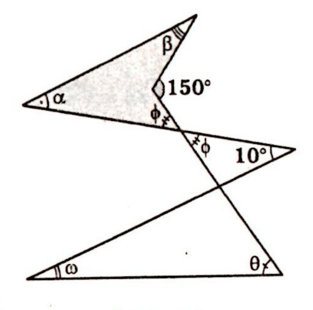
$$\alpha + \beta + \theta + \cancel{z} = x + y + \cancel{z}$$

$$\Rightarrow \; \alpha + \beta + \theta = x + y$$

$$\therefore \; \mathbf{\alpha + \beta + \theta = 80°}$$

Clave D

Resolución Nº 6



- Piden: $\alpha + \beta + \theta + \omega$
- En ⏢: $\alpha + \beta + \phi = 150°$ ... (I)
- En ⧖: $\omega + \theta = 10° + \phi$ ... (II)

- Sumando (I) y (II):

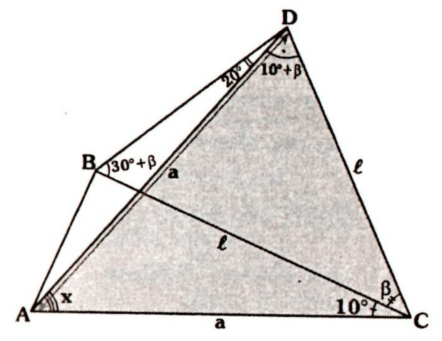
$$\alpha+\beta+\theta+\omega+\cancel{\phi}=150^\circ+10^\circ+\cancel{\phi}$$

$$\therefore\ \alpha+\beta+\theta+\omega=\mathbf{160^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 7

- Graficando:



- Piden: x
- Tenemos por dato: AC = AD y BC = CD

$\Rightarrow$ ΔADC y ΔBCD : isósceles

- Luego:

$$m\measuredangle ADC=m\measuredangle ACD=10^\circ+\beta$$

$$m\measuredangle BDC=m\measuredangle DBC=30^\circ+\beta$$

- En ΔADC:

$$x+20^\circ+2\beta=180^\circ \qquad \dots (I)$$

- En ΔBCD:

$$30^\circ+\beta+\beta+30^\circ+\beta=180^\circ$$

$$\Rightarrow\ \beta=40^\circ$$

- En (I):

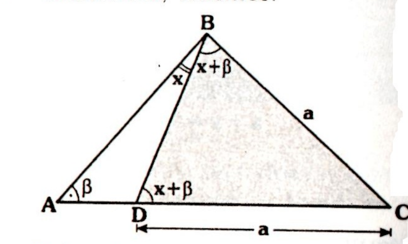
$$x+20^\circ+2(40^\circ)=180^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x=80^\circ}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 8

- Graficando, tenemos:



- Piden: x
- Dato: $m\measuredangle ABC=80^\circ+m\measuredangle BAC$

$BC=CD$

- Del último dato: ΔDCB es isósceles

$$\Rightarrow\ m\measuredangle CDB=m\measuredangle DBC=x+\beta$$

- Del primer dato:

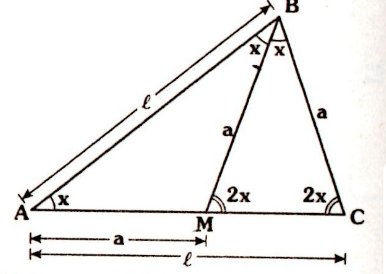
$$2x+\cancel{\beta}=80^\circ+\cancel{\beta}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=40^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 9

- Graficando, se tiene:



- Piden: $m\measuredangle MBC$
- De los datos ΔAMB, ΔMBC y ΔABC son isósceles, completemos medidas angulares:

Sea $m\measuredangle MAB=x\ \Rightarrow\ m\measuredangle ABM=x$

- Por $\measuredangle$ exterior: $m\measuredangle BMC=2x$

ΔMBC : isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle MCB=2x$

ΔABC : isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle ABC=2x$

$\Rightarrow$ $m\measuredangle MBC=x$

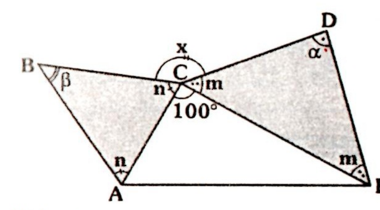
- Finalmente:

$$\Delta MBC:\ 2x+2x+x=180^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x=36^\circ}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 10



- Piden: x
- Tenemos por dato: $\alpha+\beta=140^\circ$
- También por dato los triángulos ABC y CDE son isósceles de bases $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$.

$$m\measuredangle BAC=m\measuredangle BCA=n$$

$$m\measuredangle DCE=m\measuredangle CED=m$$

- Luego:

$$x+m+n+100^\circ=360^\circ \qquad \dots (I)$$

- En ΔABC y ΔCDE:

$$2n+\beta=180^\circ \qquad \dots (II)$$

$$2m+\alpha=180^\circ \qquad \dots (III)$$

- Sumando (II) y (III)

$$2n+2m+\underbrace{\alpha+\beta}_{140^\circ}=360^\circ$$

$$\Rightarrow\ m+n=110^\circ$$

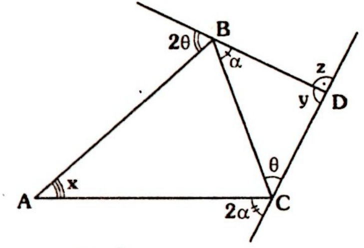
- En (I):

$$x+110^\circ+100^\circ=360^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x=150^\circ}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 11



- Piden: $\dfrac{x+y}{z}$
- Sea: $E=\dfrac{x+y}{z} \qquad \dots (I)$
- En ΔBCD, por ángulo exterior:

$$z=\alpha+\theta \qquad \dots (II)$$

- En ⏢, por teorema 6:

$$x+y=2\alpha+2\theta$$

$$x+y=2(\alpha+\theta) \qquad \dots (III)$$

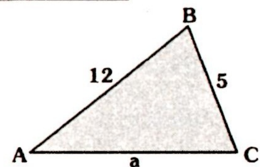
- Reemplazando en (I):

$$E=\frac{2\cancel{(\alpha+\theta)}}{\cancel{\alpha+\theta}}$$

$$\therefore\ \mathbf{E=2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 12



- Piden: $\text{perím}_{\blacktriangle ABC}$.
- Por dato el ΔABC es isósceles, es decir "a" es 5 ó 12.
- Pero antes, usemos existencia:

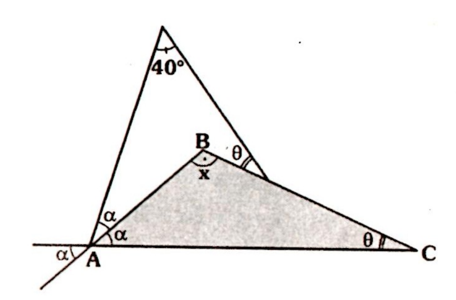
$$12-5<a<12+5$$
$$7<a<17$$

- El único valor para "a", para que el triángulo sea isósceles es 12.

$$\Rightarrow \text{Perím}_{\blacktriangle ABC}=12+12+5$$
$$\therefore \textbf{Perím}_{\blacktriangle ABC}=\mathbf{29\,cm}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 13



- Se nos pide: x
- En ΔABC : $x+\alpha+\theta=180°$ ... (I)
- En $\measuredangle$: $\alpha+\theta+40°=x$

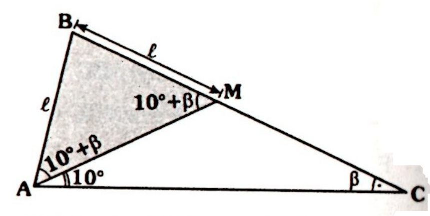
$$\Rightarrow \alpha+\theta=x-40°$$

- Reemplazando en (I):

$$x+x-40°=180°$$
$$\therefore \mathbf{x=110°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 14



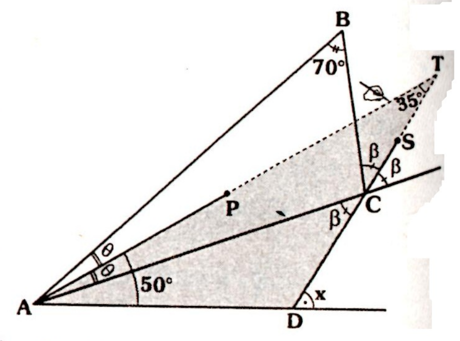
- Piden: $m\measuredangle BAC-m\measuredangle BCA$
- Como: $AB=BM \Rightarrow \Delta ABM$ es isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle BAM=m\measuredangle AMB=10°+\beta$$
$$\Rightarrow m\measuredangle BAC-m\measuredangle BCA=20°+\beta-\beta$$
$$\therefore m\measuredangle BAC-m\measuredangle BCA=20°$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 15

Este problema se puede resolver completando ángulos, pero también de la siguiente forma.



- Se nos pide: x
- Prolongamos $\overline{AP}$ y $\overline{CS}$, para poder utilizar el teorema 27

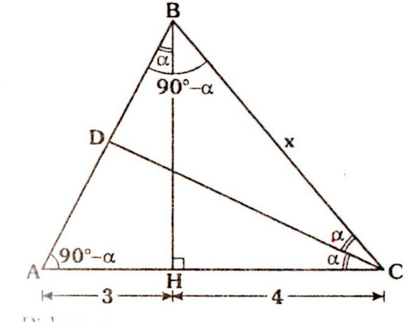
$$\Delta ABC: m\measuredangle ATC=\frac{m\measuredangle ABC}{2}$$
$$\Rightarrow m\measuredangle ATC=\frac{70°}{2}=35°$$

- En ΔATD, por ángulo exterior:

$$x=50°+35°$$
$$\therefore \mathbf{x=85°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 16



- Piden: x
- En ◺ AHB: $m\measuredangle HAB=90°-\alpha$
- En ΔABC, se tiene:

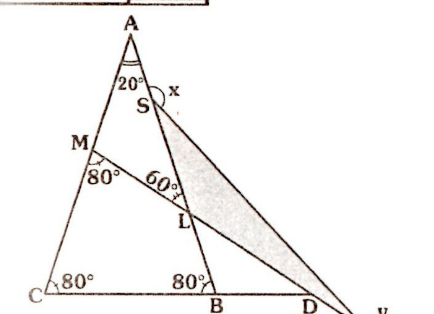
$m\measuredangle ACB=2\alpha$ y $m\measuredangle CAB=90°-\alpha$

$\Rightarrow m\measuredangle ABC=90°-\alpha$, es decir el ΔABC es isósceles $\Rightarrow BC=AC$

$$\therefore \mathbf{x=7}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 17



- Piden: x + y
- Por dato: $AB=AC$ y $DM=DC$

$\Rightarrow \Delta ABC$ y ΔDMC son isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle ACB=m\measuredangle CBA=m\measuredangle CMD=80°$

- En ΔLMA, por ángulo exterior:

$m\measuredangle MLA+20°=80° \Rightarrow m\measuredangle MLA=60°$

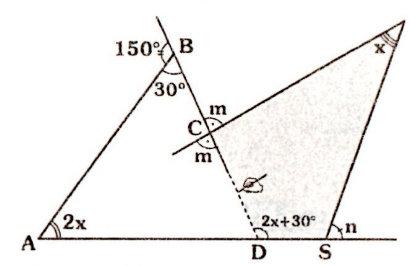
Finalmente:

- En ΔTLS, por suma de ángulos exteriores.

$$x+y+60°=360°$$
$$\therefore \mathbf{x+y=300°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 18



- Se nos pide x
- Dato: $m+n=150°$
- Se prolonga $\overline{BC}$, hasta obtener el triángulo ABD, por ángulo exterior:

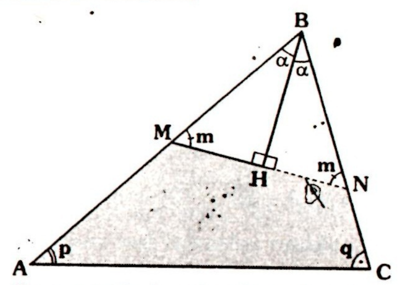
$$m\measuredangle SDB=2x+30°$$

- En ⏢, por teorema 6:

$$x+2x+30°=m+n$$
$$\Rightarrow 3x+30°=150°$$
$$\therefore \mathbf{x=40°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 19



- Se nos pide la relación entre m, p y q
- Se prolonga $\overline{MH}$ hasta que corte a $\overline{BC}$ en N.
- En ⊿MHB: $\alpha + m = 90°$

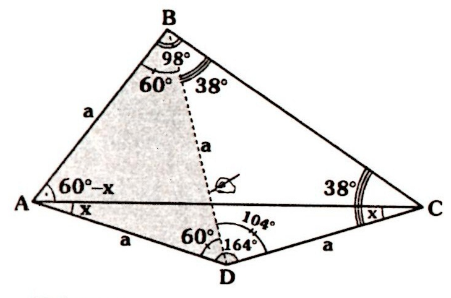
  $\Rightarrow$ En ⊿HNB: $m∢HNB = m$
- En ⌂, por teorema 8:

$$m + m = p + q$$

$$\therefore \ m = \frac{p+q}{2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 20



- Piden: x
- Por dato: $AB = AD$
- Como: $m∢BAD = 60° \Rightarrow \Delta BAD$ es equilátero
- Luego:

  $m∢DBC = 38°$ y $m∢ADC = 104°$

  $\Rightarrow m∢DCB = 38°$

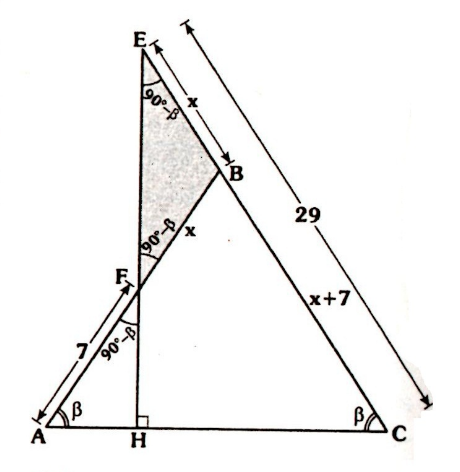
  $\Rightarrow \Delta BDC$: isósceles $\Rightarrow BD = DC = a$
- ΔADC : isósceles $\Rightarrow m∢ACD = x$

  $\Rightarrow x + x + 164° = 180°$

  $\therefore$ **x = 8°**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 21



- Piden: x
- Por dato ΔABC : isósceles $(AB = BC)$
- ⊿HEC: $m∢HEC = 90° - \beta$
- ⊿AHF: $m∢HFA = 90° - \beta$

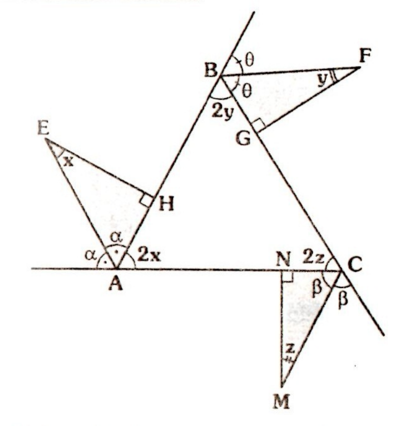
  ΔFBE es isósceles $\Rightarrow BF = BE = x$
- También $AB = BC = x + 7$

  $\Rightarrow x + x + 7 = 29$

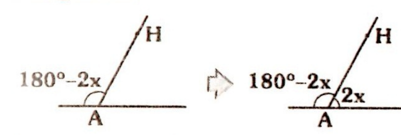
  $\therefore$ **x = 11**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 22



- Piden: $x + y + z$
- En ⊿AEH: $\alpha = 90° - x$
- Del gráfico:



- En forma análoga:

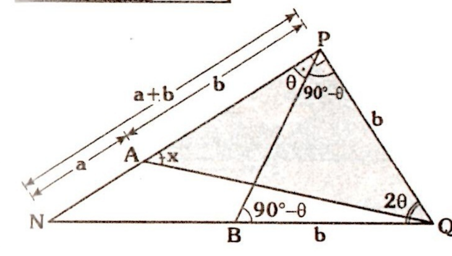
  $m∢ABC = 2y \Rightarrow m∢ACB = 2z$
- Finalmente en ΔABC :

$$2x + 2y + 2z = 180°$$

$$\therefore \ \mathbf{x + y + z = 90°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 23



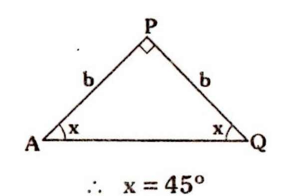
- Piden: x
- Dato: $NP = AN + QB$ y

  $m∢PQN = 2(m∢NPB)$
- Como:

  $m∢NPQ = 90° \Rightarrow m∢BPQ = 90° - \theta$
- En ΔBPQ se tiene:

  $m∢BQB = 2\theta \Rightarrow m∢PBQ = 90° - \theta$
- Luego el triángulo BPQ isósceles

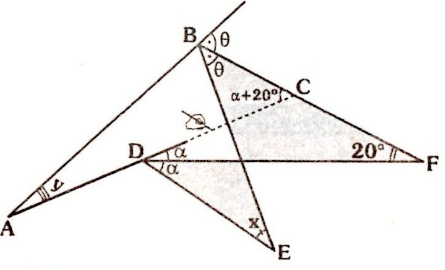
  $\Rightarrow BQ = PQ = b$
- Como: $NP = a + b \Rightarrow AP = b$
- En ⊿APQ:



$$\therefore \ x = 45°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 24



- Piden: $x - y$
- En ⧖ : $x + \alpha = \theta + 20°$

  $\Rightarrow x = \theta + 20° - \alpha$
- En ΔABC , por ángulo exterior:

  $y + \alpha + 20° = \theta \Rightarrow y = \theta - \alpha - 20°$

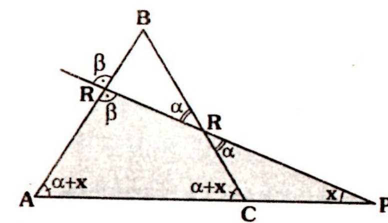
- Finalmente:

$$x - y = (\theta - 20° - \alpha) - (\theta - \alpha - 20°)$$

$$\therefore\ \mathbf{x - y = 40°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 25



- Se nos pide: x
- Dato: $\alpha + \beta = 40$ y $AB = BC$
- En ΔCRP por ángulo exterior:

$$m\measuredangle RCA = \alpha + x$$

- Como: $AB = BC \Rightarrow \Delta ABC$ es isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle ACB = \alpha + x$$

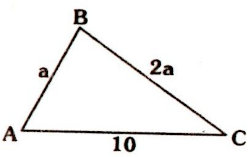
- En ΔARP:

$$\underbrace{\alpha + \beta}_{40°} + x + x = 180°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 70°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 26



- Piden: $a_{(\text{menor entero})}$
- Por existencia de triángulos:

$$2a - a < 10 < 2a + a$$

$$a < 10 < 3a$$

- Se tendrá entonces:

$$a < 10$$

$$10 < 3a \Rightarrow \frac{10}{3} < a$$

- De donde tenemos la variación de a:

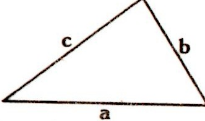
$$\frac{10}{3} < a < 10$$

$$3{,}33 < a < 10$$

$$\therefore\ a_{(\text{menor entero})} = 4$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 27



- Nos piden el mayor valor entero de a (en realidad, puede ser "b" o "c")
- Dato: $a + b + c = 40$
- Por existencia de triángulos: $a < b + c$
- Sumando "a": $a + a < a + b + c$

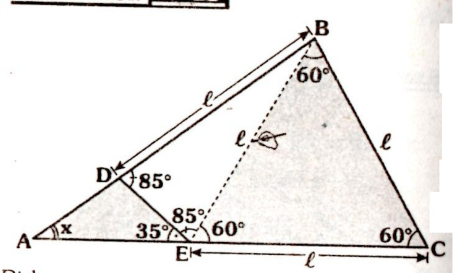
$$\Rightarrow 2a < 40$$

$$a < 20$$

- Como $a < 20$, el mayor valor entero es **19**.

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 28



Piden: x

Dato: $BD = BC = EC$

Como $BC = CE$ y $m\measuredangle BCE = 60°$, al trazar $\overline{BE}$ el triángulo EBC resulta ser equilátero.

$$\Rightarrow EB = \ell \ \text{ y } \ m\measuredangle BEC = 60°$$

ΔBED es isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle BDE = m\measuredangle DEB = 85°$$

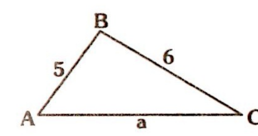
En ΔAED, por ángulo exterior:

$$x + 35° = 85°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 50°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 29



Piden: perímetro$_{(\blacktriangle ABC)}$

Por dato: $a = 2(AB)$ o $a = 2(BC)$, pero antes, utilicemos existencia:

$$6 - 5 < a < 6 + 5$$

$$1 < a < 11$$

De acuerdo al dato, la única posibilidad para que "a" sea el doble de uno de los otros dos es:

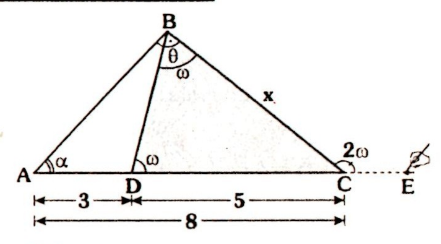
$$a = 10$$

$$\Rightarrow \text{Perímetro}_{(\blacktriangle ABC)} = 10 + 5 + 6$$

$$\therefore\ \textbf{Perímetro}_{(\blacktriangle ABC)} = \mathbf{21}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 30



- Piden: x
- Dato: $\alpha + \theta = 2\omega$, $AD = 3$ y $AC = 8$

$$\Rightarrow DC = 5$$

- Por $\measuredangle$ exterior, en el triángulo ABC:

$$m\measuredangle BCE = \alpha + \theta$$

- Del primer dato: $m\measuredangle BCE = 2\omega$
- En ΔDBC:

Como: $m\measuredangle BDC = \omega$ y $m\measuredangle BCE = 2\omega$

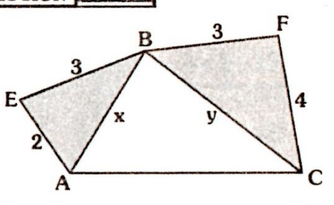
$$\Rightarrow m\measuredangle DBC = \omega$$

- Luego: ΔDBC es isósceles

$$\therefore\ \mathbf{x = 5}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 31



- Piden el mayor valor entero de: $x + y$
- Por existencia de triángulos

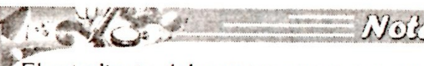
En ΔAEB: $x < 2 + 3 \Rightarrow x < 5$

En ΔBFC: $y < 3 + 4 \Rightarrow y < 7$

$$\Rightarrow x + y < 12$$

$$\therefore\ \mathbf{(x + y)_{\substack{\text{máximo}\\ \text{entero}}} = 11}$$

Clave C

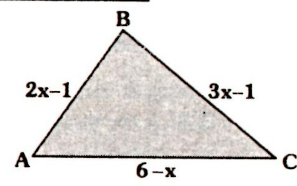


El estudiante debe notar que **x** *e* **y** *no necesariamente son enteros, pues nos piden la suma, la cual debe ser máxima y entera.*

Como $x < 5$ *e* $y < 7$*, es cierto que los máximos enteros de* **x** *e* **y** *por separado son 4 y 6 respectivamente, pero esto no piden.*

En este tipo de ejercicios, hay que analizar cual es la expresión que se busca.

RESOLUCIÓN Nº 32



- Piden: $\text{Perímetro}_{(\blacktriangle ABC)}$
- Dato: AB, BC y AC son enteros.
- Primero, las longitudes son positivas.

$\cdot\ 6 - x > 0 \Rightarrow x < 6$ ... (I)

$\cdot\ 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ ... (II)

$\cdot\ 3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$ ... (III)

- De la primera expresión, se deduce que x es entero, ya que AC es entero.
- Por existencia:

$(3x-1) - (2x-1) < 6 - x < (3x-1) + (2x-1)$

$x < 6 - x < 5x - 2$

- Analizando por separado:

$\cdot\ x < 6 - x \Rightarrow x < 3$ ... (IV)

$\cdot\ 6 - x < 5x - 2 \Rightarrow x > \frac{4}{3}$ ... (V)

- De las expresiones (I) al (V):

$\frac{4}{3} < x < 3$ ... (α)

- Como se indica **x** es entero, el valor de x, deacuerdo a la última expresión es 2.

$\Rightarrow AB = 2(2) - 1 = 3$

$BC = 3(2) - 1 = 5$

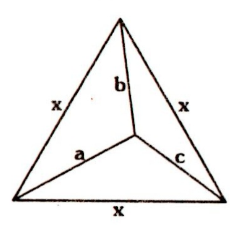
$AC = 6 - (2) = 4$

$\Rightarrow \text{Perímetro}_{(\blacktriangle ABC)} = 3 + 4 + 5$

$\therefore$ **Perímetro**$_{(\blacktriangle ABC)}$ **= 12**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 33



- Nos piden: x
- Dato: . x es entero

  . $a + b + c = 9$

- Por la observación del teorema 50:

$\frac{3x}{2} < a + b + c < 2x$

- Analizando por partes:

$\cdot\ \frac{3x}{2} < a + b + c$

$\frac{3x}{2} < 9 \Rightarrow x < 6$ ... (I)

$\cdot\ a + b + c < 2x$

$9 < 2x \Rightarrow x > 4{,}5$ ... (II)

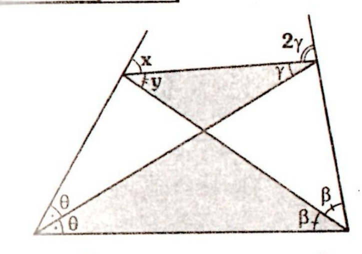
De (I) y (II):

$4{,}5 < x < 6$

$\therefore\ \mathbf{x_{(entero)} = 5}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 34



Piden: $\frac{x}{y}$

En ⧖: $y + \gamma = \theta + \beta$

$\Rightarrow y = \theta + \beta - \gamma$

En ⏢: por teorema 8

$x + 2\gamma = 2\theta + 2\beta$

$x = 2\theta + 2\beta - 2\gamma$

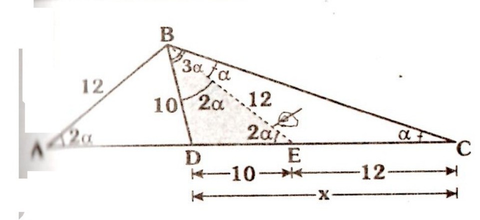
$\Rightarrow x = 2(\theta + \beta - \gamma)$

$\frac{x}{y} = \frac{2(\theta + \beta - \gamma)}{(\theta + \beta - \gamma)}$

$\therefore\ \mathbf{\frac{x}{y} = 2}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 35



- Piden: x
- Datos:

$AB = 12$, $BD = 10$, $m\measuredangle ACB = \alpha$, $m\measuredangle BAC = 2\alpha$ y $m\measuredangle DBC = 3\alpha$

- Se traza $\overline{BE}$, tal que $m\measuredangle EBC = \alpha$

$\Rightarrow m\measuredangle DBE = 2\alpha$ y por ángulo exterior en el ΔBEC : $m\measuredangle BED = 2\alpha$

- Tenemos entonces: ΔEBD, ΔEBC y ΔABE son isósceles.

ΔBDE: $BD = DE = 10$

ΔABE: $AB = BE = 12$

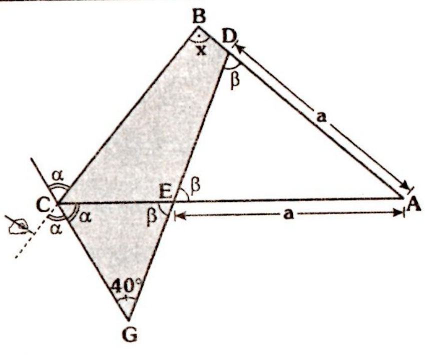
ΔEBC: $EB = EC = 12$

$\Rightarrow x = 10 + 12$

$\therefore$ **x = 22**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 36



- Piden: x
- Dato: AE = AD
- ΔEDA isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle DEA = m\measuredangle EDA = \beta$

- En ⧍, por teorema 6:

$x + 40° = \alpha + \beta$ ... (I)

- En ΔCGE:

$$\alpha+\beta+40^\circ=180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta=140^\circ \qquad \ldots (II)$$

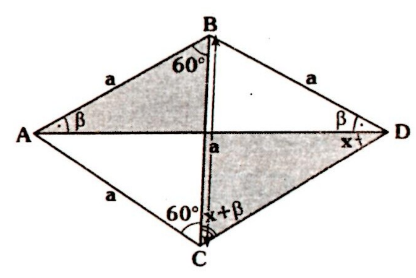
- Reemplazando (II) en (I):

$$x+40^\circ=140^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x=100^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 37



- Piden: x
- Dato: $AB=BC=AC=BD$

$\Rightarrow \Delta ABC$ es equilátero

ΔABD y ΔCBD : isósceles

$\Rightarrow$ $m\measuredangle BAD=m\measuredangle ADB=\beta$;

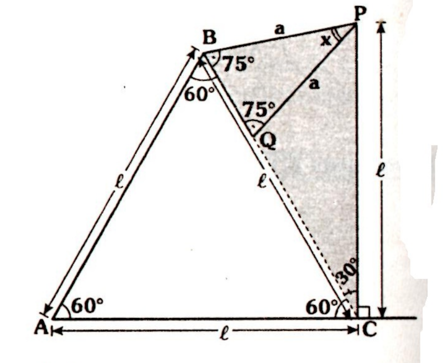
$m\measuredangle BCD=m\measuredangle BDC=\beta+x$

- En ⊿: $x+x+\not\beta=60^\circ+\not\beta$

$$\therefore\ \mathbf{x=30^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 38



- Piden: x
- Dato: $AB=AC=PC$
- Como: $m\measuredangle BAC=60^\circ$ y $AB=AC$, el triángulo ABC es equilátero.
- Como $m\measuredangle ABQ=60^\circ \Rightarrow$ al prolongar $\overline{BQ}$ pasará por C.

$$\Rightarrow BC=\ell \ \text{ y } \ m\measuredangle BCA=60^\circ$$

$$\Rightarrow m\measuredangle BCP=30^\circ$$

- ΔBCP : isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle CBP=m\measuredangle BPC=75^\circ$$

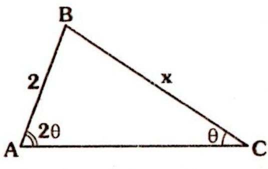
- ΔBPC : isósceles

$$75^\circ+75^\circ+x=180^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x=30^\circ}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 39

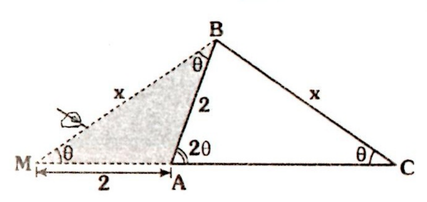


- Piden el valor entero de x.

- Como $m\measuredangle BAC > m\measuredangle BCA$, por teorema de la correspondencia.

$$x>2 \qquad \ldots (I)$$

- Luego ; por lo expresado en página Nº 37 (trazos auxiliares):



- Se prolonga $\overline{CA}$, tal que $m\measuredangle BMC=\theta$

$$\Rightarrow \Delta MBC \text{ isósceles } \Rightarrow MB=x$$

- En ΔMBA, por ángulo exterior :

$$m\measuredangle ABM=\theta$$

$$\Rightarrow \Delta MBA \text{ isósceles } \Rightarrow MA=AB=2$$

- Por existencia:

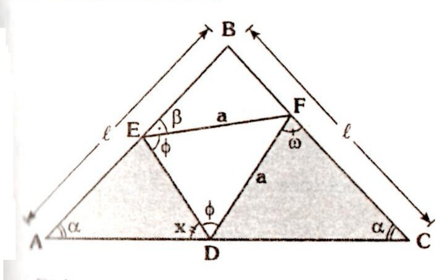
$$x<2+2 \Rightarrow x<4 \qquad \ldots (II)$$

- De (I) y (II): $\quad 2<x<4$

$\therefore$ **El valor entero de x es 3.**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 40



- Piden: x
- Datos:

$DF=EF$; $AB=BC$ y $\beta+\omega=78^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABC$ y $\Rightarrow \Delta DEF$ son isósceles

- Por ángulo exterior en:

$$\Delta EAD:\ x+\alpha=\beta+\phi \qquad \ldots (I)$$

$$\Delta CFD:\ x+\phi=\alpha+\omega \qquad \ldots (II)$$

- Sumando (I) y (II):

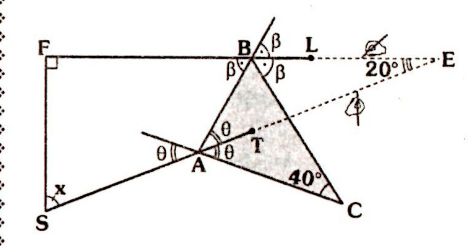
$$2x+\cancel{\alpha+\phi}=\beta+\cancel{\alpha+\theta}+\omega$$

$$2x=\underbrace{\beta+\omega}_{78^\circ}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=39^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 41



- Nos piden: x
- Prolongamos $\overline{AT}$ y $\overline{BL}$, las cuales se cortarán en E.
- En el ΔBCA, por ángulo entre bisectrices (teorema 27):

$$m\measuredangle BEA=\frac{40^\circ}{2}=20^\circ$$

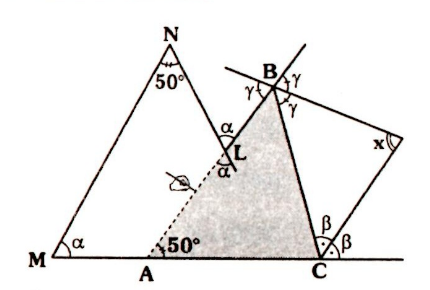
- En ◺SFE:

$$x+20^\circ=90^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x=70^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 42



- Nos piden: x
- En (MNLA), por teorema 8

$$m\sphericalangle LAC + \alpha = 50° + \alpha$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle LAC = 50°$$

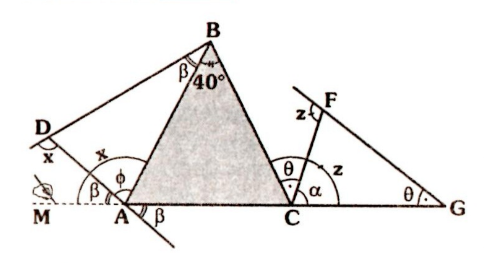
- En ΔABC, por ángulo entre bisectrices (teorema 26)

$$x = 90° - \frac{50°}{2}$$

$$\therefore \mathbf{x = 65°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 43



- Piden: $x + z$
- Por ángulo exterior, en:

$$\Delta BAD : x = \beta + \phi$$

$$\Delta CFG : z = \alpha + \theta$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle MAB = \beta + \phi = x$$

$$m\sphericalangle BCG = \alpha + \theta = z$$

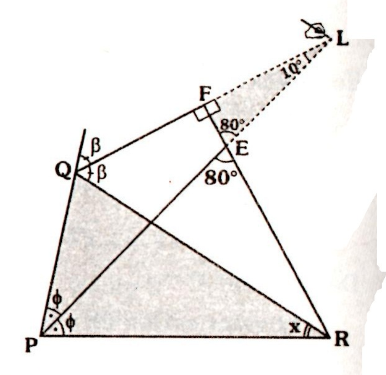
- En ΔBAC, por teorema 7:

$$x + z = 180° + 40°$$

$$\therefore \mathbf{x + z = 220°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 44



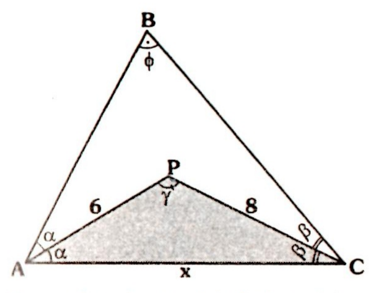
- Piden: x
- Prolongamos $\overline{QF}$ y $\overline{PE}$, las cuales se cortan en L.
- En $\triangle EFL$: $m\sphericalangle FLE = 10°$
- En ΔRPQ, por ángulo entre bisectrices (teorema 27).

$$10° = \frac{x}{2}$$

$$\therefore \mathbf{x = 20°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 45



- Nos piden la cantidad de valores enteros de x.
- Por teorema 25:

$$\gamma = 90° + \frac{\phi}{2} \Rightarrow \gamma > 90°$$

- Luego el triángulo APC es obtusángulo.
- En ΔAPC como $\gamma > 90°$, $\overline{AC}$ es el lado de mayor longitud:

$$\Rightarrow x > 8 \qquad \text{... (I)}$$

- Por existencia:

$$8 - 6 < x < 8 + 6$$

$$2 < x < 14 \qquad \text{... (II)}$$

- Como $\gamma > 90°$, por teorema 21:

$$x^2 > 6^2 + 8^2$$

$$\Rightarrow x > 10 \qquad \text{... (III)}$$

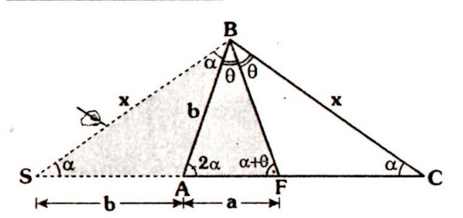
- De (I), (II) y (III):

$$10 < x < 14$$

- Luego, los valores enteros de **x**, son: **11**, **12** y **13**.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 46



- Piden: x
- Como $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle BCA)$, por el criterio indicado en la página 37 (trazos auxiliares):
- Se prolonga $\overline{CA}$, tal que $m\sphericalangle BSF = \alpha$
- Luego: $m\sphericalangle SBA = \alpha \Rightarrow \Delta SAB$ y ΔSBC son isósceles.

$$\Rightarrow AB = AS = b \text{ y } SB = BC = x$$

- En ΔBFC, por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle BFA = \alpha + \theta$$

- Se tendrá entonces:

$$m\sphericalangle SBF = m\sphericalangle BFA = \alpha + \theta$$

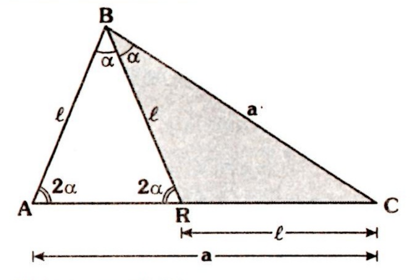
- ΔSBF es isósceles

$$\Rightarrow SB = SF$$

$$\therefore \mathbf{x = a + b}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 47



- Piden: $m\sphericalangle BCA$

- Dato: AC=BC y AB=BR.

$\Rightarrow \Delta ABC$ y ΔABR son isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle CBA = m\measuredangle BAC = 2\alpha$

$m\measuredangle BAR = m\measuredangle ARB = 2\alpha$

- En ΔBRC: por ángulo exterior

$m\measuredangle BCA + \alpha = 2\alpha$

$\Rightarrow m\measuredangle BCA = \alpha$

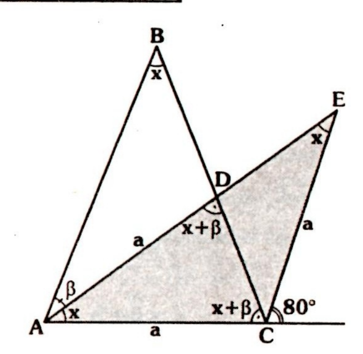
- En ΔABR:

$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$

$\therefore\ \alpha = 36°$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 48



- Piden: x
- Dato: AB=BC y AD=CE

$\Rightarrow \Delta ABC$: isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle ACB = x + \beta$

- Por ángulo exterior, en ΔABD:

$m\measuredangle ADC = x + \beta$

$\Rightarrow \Delta ADC$ es isósceles $\Rightarrow AD = AC = a$

- Como AC = CE = a $\Rightarrow \Delta ACE$ es isósceles $\Rightarrow m\measuredangle CAE = m\measuredangle AEC = x$

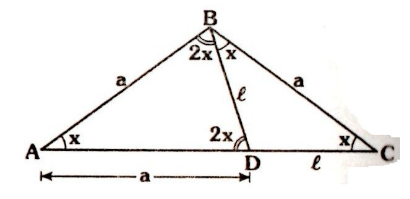
- Por ángulo exterior, en ΔAEC

$x + x = 80°$

$\therefore\ x = 40°$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 49



- Piden: x
- Dato: AD=BC ; BD=DC y

$m\measuredangle BAC = m\measuredangle DBC$

- ΔBDC: isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle DBC = m\measuredangle DCB = x$

- ΔABC: isósceles $\Rightarrow$ AB = BC = a
- ΔABD isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle ABD = m\measuredangle ADB = 2x$

- En ΔABD:

$2x + 2x + x = 180°$

$\therefore\ x = 36°$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 50

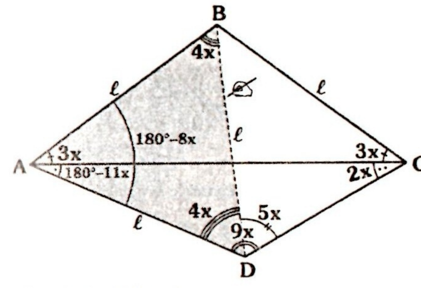
- Del dato:

$m\measuredangle ADC = 3(m\measuredangle BAC) = 9x$

$\Rightarrow m\measuredangle ADC = 9x$ y

$m\measuredangle BAC = 3x$

- Ubiquemos estos datos en el gráfico:



- Se nos pide: x
- También es dato: AB = BC = AD

$\Rightarrow \Delta ABC$: isósceles

- En ΔADC: $m\measuredangle DAC = 180° - 11x$

$\Rightarrow m\measuredangle BAD = 180° - 8x$ y AB=AD

$\Rightarrow \Delta BAD$: $m\measuredangle ABD = m\measuredangle ADB = 4x$

$\Rightarrow m\measuredangle BDC = 5x$

- Luego el ΔDBC es isósceles:

$DB = BC = \ell$

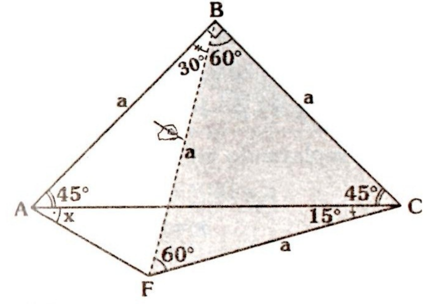
- Como: $AB = AD = BD = \ell \Rightarrow$ el triángulo ABD es equilátero

$\Rightarrow 4x = 60°$

$\therefore\ x = 15°$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 51



- Piden: x

- Del dato:

$BC = CF = a$ y $m\measuredangle ACF = 15°$

$\Rightarrow m\measuredangle BCF = 60° \Rightarrow \Delta BFC$ equilátero

- Luego: AB = BF = a y

$m\measuredangle ABF = 30°$

- ΔABF isósceles :

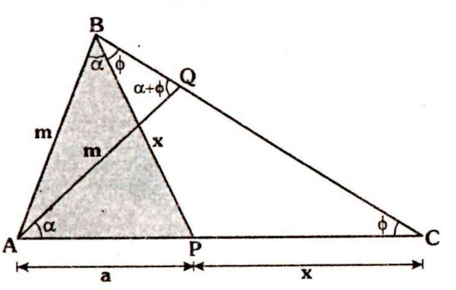
$m\measuredangle BAF = m\measuredangle AFB = 75°$

$\Rightarrow 45° + x = 75°$

$\therefore\ x = 30°$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 52



- Nos piden el menor valor entero de x en función de m.
- Dato: BP = PC y AB = AQ = m , donde m es par.
- Se tendrá entonces:

ΔBQA y ΔBPC isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle PBC = m\measuredangle PCB = \phi$

- Por $\measuredangle$ exterior en ΔAQC:

$m\measuredangle AQB = \alpha + \phi$

ΔABQ: $m\measuredangle QBA = \alpha + \phi$

$\Rightarrow m\measuredangle ABP = \alpha$

- Como $m\measuredangle BAP > m\measuredangle ABP$, por t. de la correpondencia, en ΔABP:

$x > a$ ... (I)

- Por existencia:

$$m < a + x \qquad \ldots \text{(II)}$$

- De (I): $a < x$
- Sumando $m + a < a + 2x$

$$\Rightarrow m < 2x$$

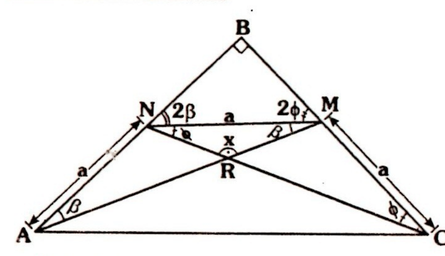
$$\Rightarrow \frac{m}{2} < x$$

- Como es par $\Rightarrow \frac{m}{2} \in \mathbb{Z}^+$

$$\therefore \mathbf{x_{(menor\ entero)} = \frac{m}{2} + 1}$$

Clave B

Resolución Nº 53



- Piden: x
- Dato: $AN = NM = MC \Rightarrow \Delta ANM$ y ΔNMC: isósceles
- ΔNRM: $x + \beta + \phi = 180°$ ... (I)
- ◺NBM: $2\beta + 2\phi = 90°$

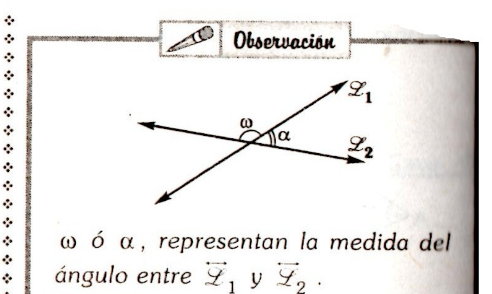
$$\Rightarrow \beta + \phi = 45°$$

- En (I):

$$x + 45° = 180°$$

$$\therefore \mathbf{x = 135°}$$

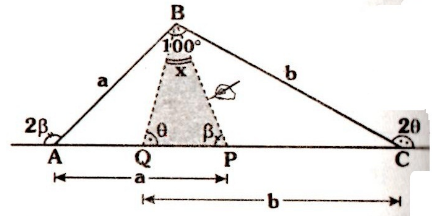
Clave C



ω ó α, representan la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

Resolución Nº 54

En este ejercicio, los puntos P y Q están en $\overline{AC}$, pero no indican el orden, dadas las condiciones, se obtendrá lo siguiente:



- Piden: x
- Dato: $AB = AP$; $CA = CQ$ y $m\measuredangle ABC = 100°$

$$\Rightarrow \Delta ABP \text{ y } \Delta QBC \text{ son isósceles}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle ABP = m\measuredangle APB = \beta$$

$$m\measuredangle QBC = m\measuredangle BQC = \theta$$

- En ΔQBP: $x + \theta + \beta = 180°$ ... (I)
- En ΔABC: por teorema 7

$$2\theta + 2\beta = 180° + 100°$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = 140°$$

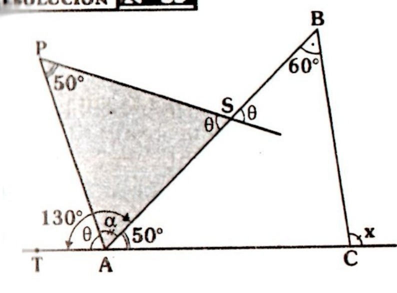
- Reemplazando en (I):

$$x + 140° = 180°$$

$$\therefore \mathbf{x = 40°}$$

Clave E

Resolución Nº 55



- Piden: x
- En ΔAPS: $\alpha + \theta + 50° = 180°$

$$\Rightarrow \alpha + \theta = 130°$$

$$\Rightarrow m\measuredangle TAS = \alpha + \theta = 130°$$

$$\Rightarrow m\measuredangle BAC = 50°$$

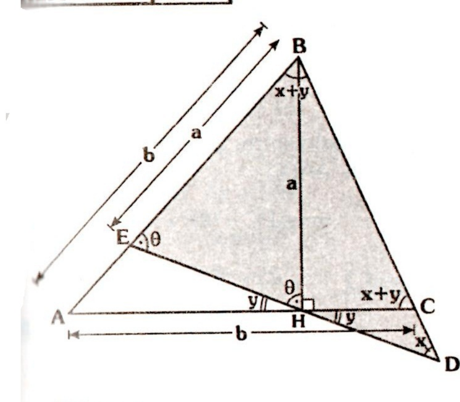
- En ΔABC por ángulo exterior:

$$x = 50° + 60°$$

$$\therefore \mathbf{x = 110°}$$

Clave C

Resolución Nº 56



- Piden: x
- Dato: $AB = AC$ y $EB = BH = a$

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ y } \Delta EBC \text{ son isósceles}$$

- Sea $m\measuredangle CHD = y \Rightarrow m\measuredangle ACB = x + y$

$$\Rightarrow m\measuredangle ABC = x + y$$

- También: $m\measuredangle BEH = m\measuredangle BHE = \theta$
- En ΔEBD:

$$x + x + y + \theta = 180°$$

$$\Rightarrow 2x + y + \theta = 180° \qquad \ldots \text{(I)}$$

- Como: $m\measuredangle AHB = 90°$

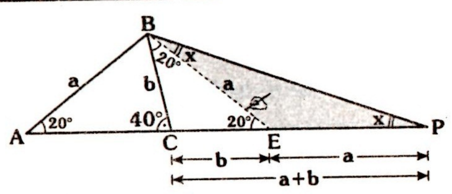
$$\Rightarrow \theta + y = 90°$$

- En (I): $2x + 90° = 180°$

$$\therefore \mathbf{x = 45°}$$

Clave B

Resolución Nº 57



- Piden: x
- Por dato: $CP = AB + BC$
- Ubicamos E en $\overline{CP}$ tal que $CE = b$

$$\Rightarrow \Delta CEB: \text{isósceles } (CB = CE)$$

$$\Rightarrow m\measuredangle CBE = m\measuredangle CEB = 20°$$

- Se tendrá ahora: ΔABE es isósceles

$$\Rightarrow AB = BE = a$$

- En ΔEBP: isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle EBP = m\measuredangle EPB = x$$

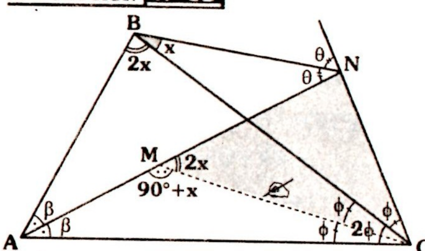
- Por ángulo exterior:

$$x + x = 20°$$

$$\therefore \mathbf{x = 10°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 58



- Piden: x
- Como $m\sphericalangle ACB = 2\phi$, se traza $\overline{CM}$ tal que : $m\sphericalangle ACM = m\sphericalangle BCM = \phi$
- En ΔCMN, por teorema 27 (ángulo entre bisectrices).

$$m\sphericalangle CBN = \frac{m\sphericalangle CMN}{2}$$

$$\Rightarrow \ x = \frac{m\sphericalangle CMN}{2}$$

$$\Rightarrow \ m\sphericalangle CMN = 2x$$

- Por teorema 25, en ΔABC :

$$m\sphericalangle AMC = 90° + \frac{m\sphericalangle ABC}{2}$$

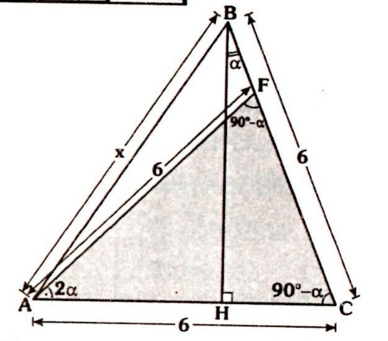
$$\Rightarrow \ m\sphericalangle AMC = 90° + x$$

- Finalmente: $90° + x + 2x = 180°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 30°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 59



- Piden: $x_{(\text{máximo entero})}$
- Dato: $AF = BC = 6$

$$m\sphericalangle FAC = 2(m\sphericalangle HBC)$$

- En ◺HBC: $m\sphericalangle BCH = 90° - \alpha$
- En ΔAFC :

$m\sphericalangle FAC = 2\alpha$ y $m\sphericalangle ACF = 90° - \alpha$

$$\Rightarrow \ m\sphericalangle AFC = 90° - \alpha$$

$\Rightarrow \Delta AFC$: isósceles $\Rightarrow AF = AC = 6$

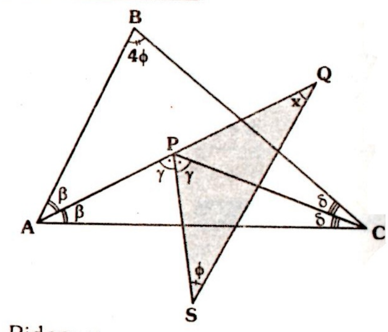
- En ΔABC, por existencia:

$$x < 6 + 6 \Rightarrow x < 12$$

$$\therefore \ \mathbf{x_{(máximo\ entero)} = 11}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 60



- Piden: x
- Por ángulo entre bisectrices (teorema 25), en ΔABC :

$$m\sphericalangle APC = 90° + \frac{4\phi}{2}$$

$$2\gamma = 90° + 2\phi$$

$$\Rightarrow \ \gamma = 45° + \phi$$

- En ΔSQP, por ángulo exterior

$$x + \phi = \gamma$$

$$\Rightarrow x + \phi = 45° + \phi$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 45°}$$

Clave D

Solucionario Ciclo Cepre-Uni

RESOLUCIÓN Nº 61



- Piden: x
- Por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle BCD = x - 2\theta$$

- ΔABC : isósceles

$$\Rightarrow \ m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle BCA = x - 2\theta$$

- ΔBDE, por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle BEA = x + \theta$$

- ΔABE : isósceles

$$m\sphericalangle ABE = x + \theta$$

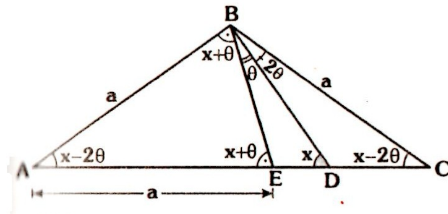
$$x - 2\theta + x + \theta + x + \theta = 180°$$

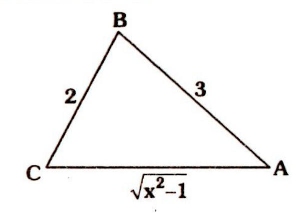
$$\Rightarrow \ 3x = 180°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 60°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 62





- Nos piden la cantidad de valores enteros para x.
- Se trata de un problema algebraico, analicemos todas las restricciones

Parte I

- En: $\sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 > 0$

$$x \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle \quad \ldots \text{(I)}$$

- También aquí, esta contenido, la condición: $AC > 0$.
- Pues AC es longitud de un lado.

Parte II

- Por existencia:

$$3 - 2 < \sqrt{x^2 - 1} < 3 + 2$$

$$1 < \sqrt{x^2 - 1} < 5$$

- Resolviendo por partes:

$$\sqrt{x^2 - 1} < 5 \Rightarrow x^2 - 1 < 25$$

$$x^2 < 26$$

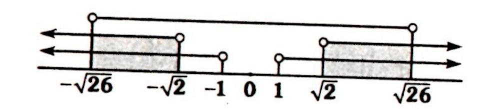
$$\Rightarrow \ x \in \langle -\sqrt{26}; \sqrt{26} \rangle \quad \ldots \text{(II)}$$

$$1 < \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow 1 < x^2 - 1$$

$$2 < x^2$$

$$\Rightarrow \ x \in \langle -\infty; -\sqrt{2} \rangle \cup \langle \sqrt{2}; \infty \rangle \quad \ldots \text{(III)}$$

- De (I), (II)y (III):



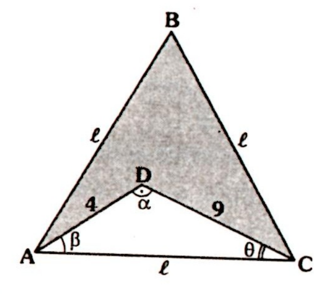
C.S. $x \in \langle -\sqrt{26};-\sqrt{2}\rangle \cup \langle \sqrt{2};\sqrt{26}\rangle$

- Como x , debe ser entero por condición, los valores de x son:

$\{-5;-4;-3;-2;2;3;4;5\}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 63



- Piden el menor valor entero del perímetro de ABCD

$\text{Perím}_{(ABCD)} = 2\ell + 4 + 9 = 2\ell + 13$

"Lo que debe ser entero es el perímetro como se indicó en el problema 31, ℓ, no es necesariamente entero"

- Por dato: $\ell + \ell + \ell > 33$

$\ell > 11$ ... (I)

- Analicemos mas restricciones.
- En ΔADC, por existencia

$9 - 4 < \ell < 9 + 4$

$5 < \ell < 13$ ... (II)

- Como $\alpha > \theta$ y $\alpha > \beta$ (pues $\alpha > 60°$, $\theta < 60°$ y $\beta < 60°$)

$\ell > 9$, $\ell > 4 \Rightarrow \ell > 9$ ... (III)

- En ABCD, por teorema 41

$\ell + \ell > 4 + 9 \Rightarrow \ell > 6{,}5$ ... (IV)

- De (I), (II) (III) y (IV):

$11 < \ell < 13$

- Formando, la expresión que se nos pide: $(2\ell + 13)$

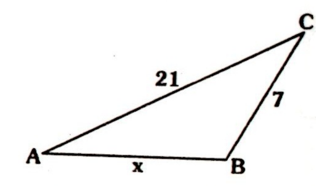
$\Rightarrow 35 < \underbrace{2\ell + 13} < 39$

$35 < \text{perím}_{(ABCD)} < 39$

- Por lo tanto el menor valor del perímetro es 36.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 64



- Nos piden el mayor valor entero de $(2x - 3)$
- Sea: $E = 2x - 3$ ... (I)
- Por existencia:

$21 - 7 < x < 21 + 7$

$14 < x < 28$

- Formando la expresión (I).
- Multiplicando 2:

$14(2) < 2x < (28)2$

- Restando: 3

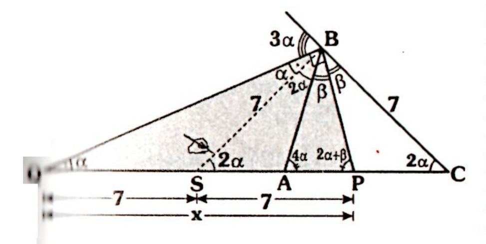
$28 - 3 < \underbrace{2x - 3} < 56 - 3$

$25 < E < 53$

$\therefore E_{(\text{máximo entero})} = 52$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 65



- Piden x
- Sea $m\measuredangle BAC = 4\alpha \Rightarrow m\measuredangle BCA = 2\alpha$ (*dato*)
- Como $\overline{BQ}$ y $\overline{BP}$ son bisectrices:

$\Rightarrow m\measuredangle QBP = 90°$

- Se tendrá entonces:

$m\measuredangle BQC = \alpha$

- Se traza $\overline{BS}$ tal que:

$m\measuredangle QBC = \alpha$

- Luego:

ΔSBC: isósceles $\Rightarrow SB = 7$

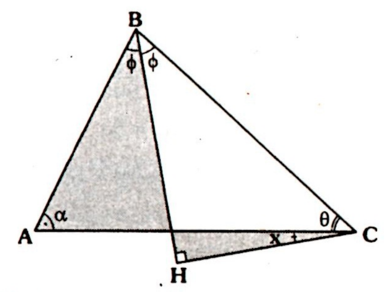
ΔQSB: isósceles $\Rightarrow BS = SQ = 7$

ΔSBP: isósceles $\Rightarrow SB = SP = 7$

$\therefore x = 14$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 66



- Piden: x
- Dato: $\alpha - \theta = 20°$
- En ⊿: $x + 90° = \alpha + \phi$ ... (I)
- En ⊿BHC: $x + \theta + \phi = 90°$ ... (II)
- Sumando (I) y (II):

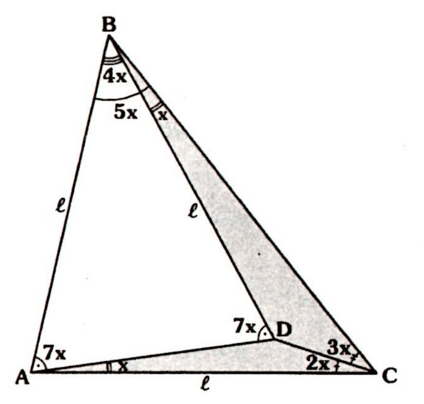
$2x + \phi + \theta + 90° = 90° + \alpha + \phi$

$\Rightarrow 2x = \underbrace{\alpha - \theta}_{20°}$

$\therefore x = 10°$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 67



- Piden: $m\measuredangle ABD$

- En $\measuredangle$ADBC:

$$m\measuredangle ADB = x + 5x + x = 7x$$

$\Rightarrow \Delta ABD$ es isósceles $\Rightarrow AB = AD = \ell$

ΔABC es isósceles, pues $AB = AC$

$$\Rightarrow m\measuredangle ABC = 5x$$

- En ΔABC: $5x + 5x + 8x = 180°$

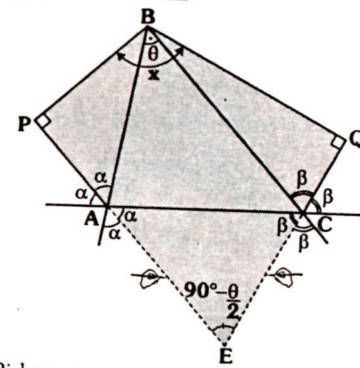
$$\Rightarrow x = 10°$$

- Como nos piden $m\measuredangle ABD$:

$$\Rightarrow \mathbf{m\measuredangle ABD = 4x = 40°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 68



- Piden: x
- Se prolonga $\overline{PA}$ y $\overline{QC}$ tal que se cortan en E.
- En ΔABC, por teorema 26:

$$m\measuredangle AEC = \frac{90° - \theta}{2}$$

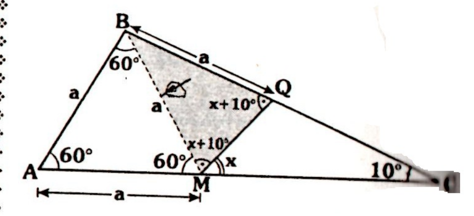
- En ⏢PBQE, por corolario 1 del teorema 6:

$$x + 90° - \frac{\theta}{2} = 180°$$

$$\therefore \mathbf{x = 90° + \frac{\theta}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 69



- Piden x
- De los datos $AB = AM = BQ$ y como $m\measuredangle BAC = 60° \Rightarrow$ al trazar $\overline{BM}$, el ΔABM resulta ser equilátero $\Rightarrow BM = a$ y $m\measuredangle AMB = 60°$
- También: ΔMBQ: isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle BMQ = m\measuredangle MQB = x + 10°$$

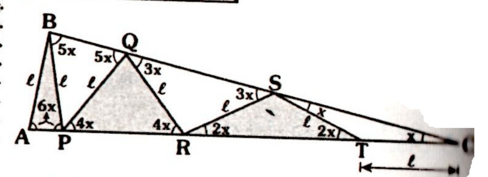
- Finalmente:

$$60° + x + 10° + x = 180°$$

$$\therefore \mathbf{x = 55°}$$

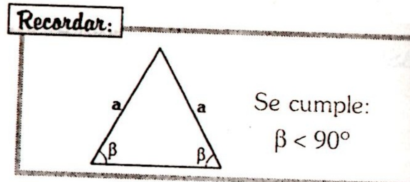
Clave D

RESOLUCIÓN Nº 70



- Piden el mayor valor entero de x.
- De los datos se tiene: ΔABP, ΔBPQ, ΔPQR, ΔQRS, ΔSTR y ΔSTC: son isósceles

Recordar:



Se cumple:
$\beta < 90°$

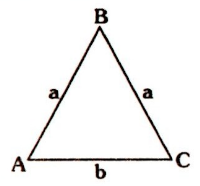
Se podría plantear ello en cada triángulo isósceles, pero la expresión que contiene a todas las restricciones, está en el ΔABP:

$$6x < 90° \Rightarrow x < 15°$$

$$\therefore \mathbf{x_{(máximo\ entero)} = 14°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 71



Por dato: a y $b \in \mathbb{Z}^+$

$$\underbrace{2a + b}_{perímetro(2p)} = 18 \Rightarrow p = 9$$

Nos piden la cantidad de triángulos con esa característica.
Por corolario del teorema 15 de existencia:

$$a < p \Rightarrow a < 9 \quad \ldots (I)$$

$$b < p \Rightarrow b < 9 \quad \ldots (II)$$

También:

$$b < 2a \Rightarrow b + 2a < 2a + 2a$$

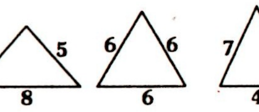
$$18 < 4a$$

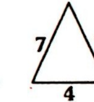
$$\Rightarrow \frac{9}{2} < a \quad \ldots (III)$$

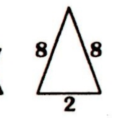
De (I) y (III): $\frac{9}{2} < a < 9$

Los valores enteros de a, son : 5, 6, 7, 8 para cada valor de a, se obtiene un valor de b, pues el perímetro es 18.

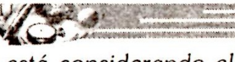
- Asi tenemos, los triángulos:





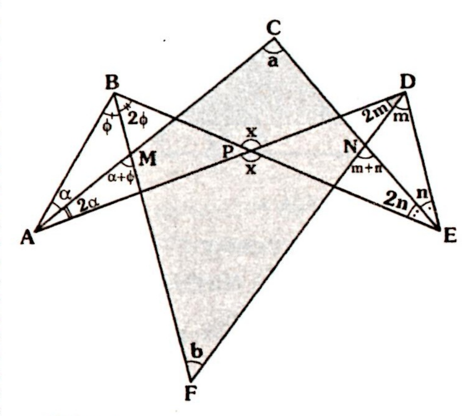


Clave D



Se está considerando el segundo triángulo, como caso particular, ya que la definición no excluye este caso.

RESOLUCIÓN Nº 72



- Pide: x
- Dato: $a + b = \omega$
- Por teorema 4, en:
- ACEP: $x = a + 2\alpha + 2n \quad \ldots (I)$
- BFDP: $x = b + 2\phi + 2m \quad \ldots (II)$
- Sumando (I) y (II):

$$2x = a + b + 2(\alpha + \phi + m + n) \quad \ldots (III)$$

- En MCNF, por teorema 6:

$$\alpha + \phi + m + n = a + b \quad \ldots (IV)$$

- En (III):

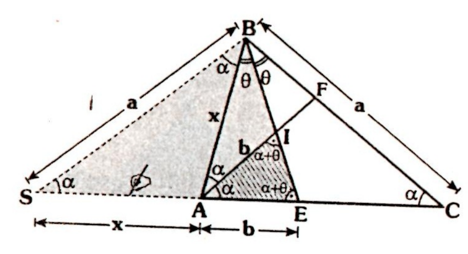
$$2x = a + b + 2(a + b)$$

$$\Rightarrow 2x = 3\underbrace{(a+b)}_{\omega}$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{3}{2}\omega}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 73



- Se nos pide x.
- Por ángulo exterior:

$$m\measuredangle AIE = m\measuredangle IEA = \alpha + \theta$$

$$\Rightarrow \triangle EIA \text{ es isósceles}$$

$$\Rightarrow AI = AE = b$$

- Se prolonga $\overline{CA}$ y se traza $\overline{BS}$, tal que :

$$m\measuredangle ABS = \alpha \ \Rightarrow m\measuredangle BSA = \alpha$$

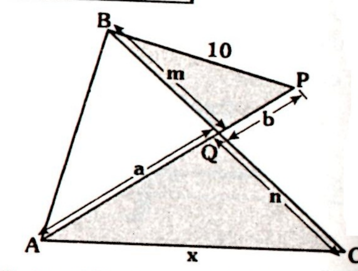
- $\triangle SBC$: isósceles $\Rightarrow SB = BC = a$
- $\triangle ABE$: isósceles $\Rightarrow SE = SB$

$$x + b = a$$

$$\therefore\ \mathbf{x = a - b}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 74



- Dato: $AP = 11$ y $BC = 13$
- Es decir $a + b = 11$ y $m + n = 13$
- Por existencia en:

$\triangle AQC$: $x < a + n$ ... (I)

$\triangle BQP$: $10 < b + m$ ... (II)

- Sumando (I) y (II):

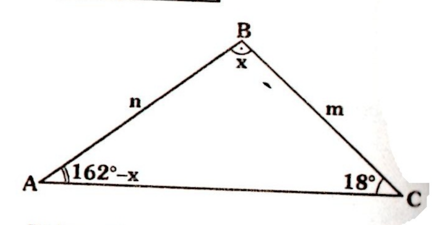
$$x + 10 < \underbrace{a+b}_{11} + \underbrace{m+n}_{13}$$

$$\Rightarrow x < 14$$

$$\therefore\ \mathbf{x_{(máximo\ entero)} = 13}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 75



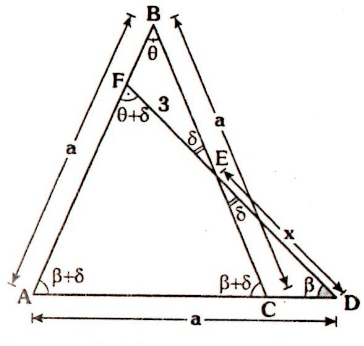
- Piden: $x_{(mínimo\ entero)}$
- Dato: $n > m$
- Por teorema de la correspondencia.

$$18° > 162° - x \ \Rightarrow\ x > 144°$$

$$\therefore\ x_{(mínimo\ entero)} = 145°$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 76



- Se nos pide el mínimo valor entero de x.
- Dato: "a" es entero y $\beta > \theta$
- Como $\beta < \theta \Rightarrow \beta + \delta > \theta + \delta$
- En $\triangle AFD$, por teorema de la correspondencia:

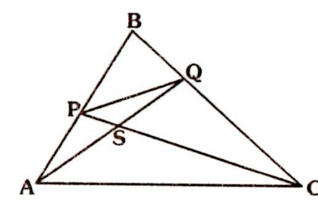
$$x + 3 > a \ \Rightarrow\ x > a - 3$$

$$\therefore\ \mathbf{x_{(mínimo\ entero)} = a - 2}$$

Clave B

> **Nota**
> *La condición para "a" es que sea mayor que 3.*

RESOLUCIÓN Nº 77



De acuerdo a las alternativas, nos piden la relación entre PQ, AC, AQ y PC.

- Por existencia en:

$\triangle PSQ$: $PQ < PS + SQ$

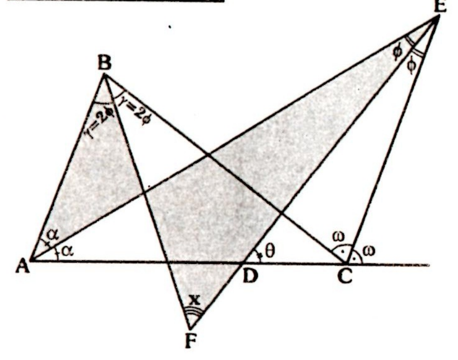
$\triangle ASC$: $AC < SC + AS$

$$\Rightarrow PQ + AC < (PS + SC) + (AS + SQ)$$

$$\therefore\ \mathbf{PQ + AC < PC + AQ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 78



- Piden x en función de θ.
- Por ángulo entre bisectrices, para el $\triangle ABC$ (teorema 27).

$$2\phi = \frac{(2\gamma)}{2} \Rightarrow \gamma = 2\phi$$

- En $\triangle ADE$: $\theta = \alpha + \phi$
- En ⋈: $x + \theta = \alpha + 2\phi \Rightarrow x = \alpha + \phi$

$$\therefore\ \mathbf{x = \theta}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 79

B

$5-\sqrt{16-x}$ $\quad$ $5+\sqrt{16-x}$

A $\quad$ 8 $\quad$ C

- Nos piden la suma de todos los valores enteros de x.
- Analicemos todas las restricciones:
- En $\sqrt{16-x}$

$$\Rightarrow 16-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 16 \quad \ldots (I)$$

- Cada lado tiene longitud positivo AC y BC ya lo son, garanticemos para AB:

$$5-\sqrt{16-x}>0$$

$$\Rightarrow 5>\sqrt{16-x} \Rightarrow x+9>0$$

$$x>-9 \quad \ldots (II)$$

- En ΔABC, se tiene $BC>AB$; por existencia:

$$BC-AB<8<BC+AB$$

$$2\sqrt{16-x}<8<10$$

- Analicemos solo: $2\sqrt{16-x}<8$; ya que $8<10$, siempre se cumple:

$$2\sqrt{16-x}<8$$

$$\Rightarrow x>0 \quad \ldots (III)$$

- De (I), (II) y (III):

$$0<x\leq 16$$

- Los valores que puede tomar x, son:

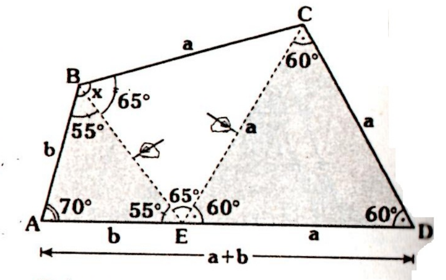
$$1, 2, 3, \ldots 15 \text{ y } 16$$

- Como nos piden la suma, por teorema:

$$S=\frac{(1+16)(16)}{2}=136$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 80



- Piden x:
- Dato: $AD=AB+BC$ y $BC=CD$
- Ubicamos E en $\overline{AD}$ tal que:

$$ED=DC=a \Rightarrow AE=AB=b$$

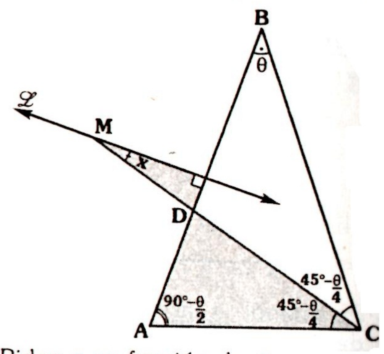
- Como $m\measuredangle EDC=60°$ y $ED=DC \Rightarrow$ el triángulo EDC es equilátero $\Rightarrow EC=a$
- Como $EC=CB \Rightarrow \Delta BCE$: isósceles
- En ΔBEC: $m\measuredangle AEB=m\measuredangle ABE=55°$
- En ΔBCE: $m\measuredangle CEB=m\measuredangle EBC=65°$

$$\Rightarrow x=55°+65°$$

$$\therefore \ \mathbf{x=120°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 81



- Piden x en función de θ

- Sea $\mathscr{L}$ mediatriz de $\overline{AB}$

ΔABC isósceles $(AB=BC)$

$$\Rightarrow m\measuredangle BAC=m\measuredangle BCA=90°-\frac{\theta}{2}$$

- Como $\overline{CD}$ es bisectriz del $\measuredangle ACB$

$$\Rightarrow m\measuredangle ACD=m\measuredangle BCD=45°-\frac{\theta}{4}$$

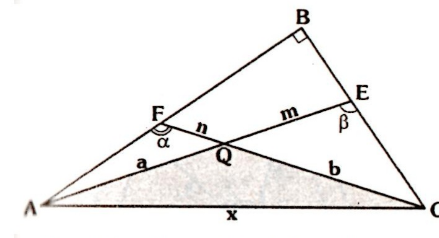
- En ⧖:

$$x+90°=90°-\frac{\theta}{2}+45°-\frac{\theta}{4}$$

$$\therefore \ \mathbf{x=45°-\frac{3\theta}{4}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 82



- Nos piden la cantidad de valores enteros para x.
- Dato: $a+b=10$

$$m+n=4$$

- En ΔAQC, por existencia:

$$x<a+b \Rightarrow x<10 \quad \ldots (I)$$

- Como $\alpha>90°$ y $\beta>90°$,

En ΔAFC: $x>n+b$

ΔAEC: $x>m+a$

$$\Rightarrow 2x>\underbrace{m+n}_{4}+\underbrace{a+b}_{10}$$

$$\Rightarrow x>7 \quad \ldots (II)$$

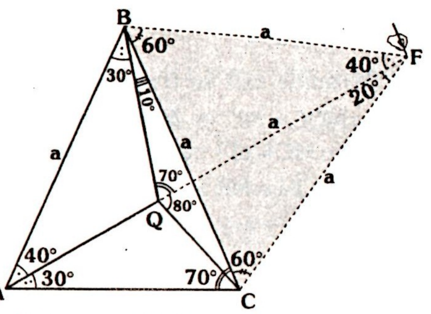
- De (I) y (II) se tiene:

$$7<x<10$$

- Los valores enteros de x son **8 y 9**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 83



- Piden: $m\measuredangle BQC$
- De acuerdo a los datos

$$m\measuredangle BAC=m\measuredangle BCA=70° \Rightarrow AB=BC$$

- Prolongamos $\overline{AQ}$ y trazamos $\overline{BF}$ tal que $m\measuredangle AFB=70°$ (pues $m\measuredangle BAQ=40°$ y $m\measuredangle BQF=70°$ – ver criterios de trazos auxiliares)

$$\Delta ABF: \text{isósceles} \Rightarrow AB=BF=a$$

- Como $m\measuredangle CBF=60°$ y $CB=BF=a \Rightarrow$ ΔCBF es equilátero $\Rightarrow CF=a$ y $m\measuredangle QFC=20°$.
- ΔFQC isósceles

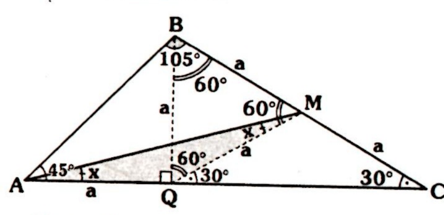
$$\Rightarrow m\measuredangle FQC=m\measuredangle QCF=80°$$

$$\Rightarrow m\measuredangle BQC=70°+80°$$

$$\therefore \ \mathbf{m\measuredangle BQC=150°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 84



- Nos piden: x.
- Partimos asi: se traza $\overline{MQ}$ tal que $m\measuredangle MQC = 30° \Rightarrow \Delta QMC$ es isósceles $(QM = MC = a)$ y $m\measuredangle QMB = 60°$ y como $QM = MB \Rightarrow \Delta QBM$ es equilátero $\Rightarrow BQ = a$ y $m\measuredangle BQA = 90°$
- Luego:

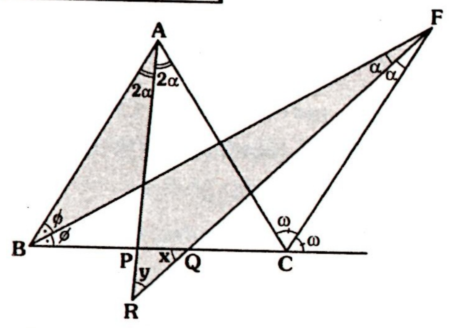
  ◺AQB: isósceles $\Rightarrow AQ = QB = a$
- Como $AQ = QM \Rightarrow \Delta AQM$ es isósceles:

$$x + x = 30°$$

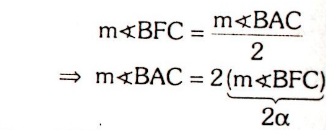
$$\therefore\ \mathbf{x = 15°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 85



- Piden que analicemos que tipo de triángulo es PQR
- En ΔBAC, por ángulo entre bisectrices:



$$m\measuredangle BFC = \frac{m\measuredangle BAC}{2}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle BAC = 2\underbrace{(m\measuredangle BFC)}_{2\alpha}$$

- En ΔFQB: $x = \phi + \alpha$
- En $\triangle$: $y + \alpha = \phi + 2\alpha$

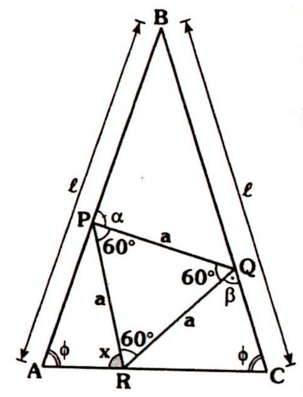
$$\Rightarrow y = \phi + \alpha$$

- Luego: $x = y$

$$\therefore\ \mathbf{\Delta PQR\ es\ isósceles}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 86



- Piden: x en función de α y β.
- Dato: ΔABC isósceles $(AB = BC)$ y ΔPQR equilátero
- Por ángulo exterior, en:

ΔRQC: $x + 60° = \beta + \phi$

ΔARP: $x + \phi = 60° + \alpha$

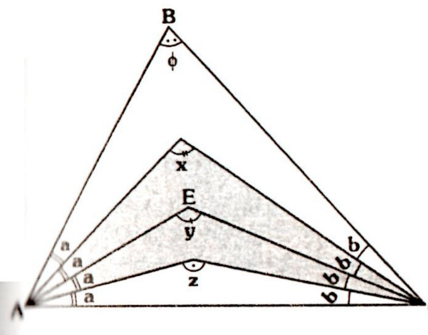
$$\Rightarrow 2x + \cancel{60° + \phi} = \beta + \alpha + \cancel{60° + \phi}$$

$$\Rightarrow 2x = \alpha + \beta$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 87



- Piden $x + y + z$ en función de ϕ.
- En la región sombreada (teorema 29):

$$y = \frac{x + z}{2} \Rightarrow x + z = 2y \qquad \ldots (I)$$

- Sea $M = x + y + z$
- Reemplazando (I), tenemos:

$$M = 3y \qquad \ldots (II)$$

Como $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{CE}$ son bisectrices de los ángulos BAC y ACB, por teorema 25:

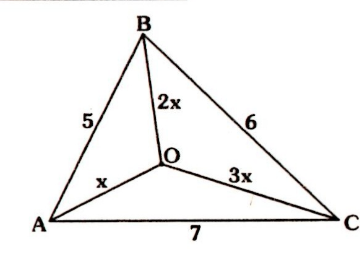
$$y = 90° + \frac{\phi}{2}$$

- En (II): $M = 3\left(90° + \dfrac{\phi}{2}\right)$

$$\therefore\ \mathbf{M = 270° + \frac{3}{2}\phi}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 88



- Nos piden la variación de x.
- Del teorema 42 y 50:

$$\frac{5 + 6 + 7}{2} < x + 2x + 3x < \overbrace{6 + 7}^{\text{Dos mayores}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{13}{6} \qquad \ldots (I)$$

Pero no es la única restricción, verifiquemos, por existencia.

ΔAOB: $2x - x < 5 < 2x + x$ ...(II)

ΔAOC: $3x - x < 7 < 3x + x$ ...(III)

ΔBOC: $3x - 2x < 6 < 3x + 2x$ ...(IV)

De (II), (III) y (IV):

$$\frac{7}{4} < x < \frac{7}{2} \qquad \ldots (V)$$

Por teorema 41:

$x + 3x < 6 + 5$ ...(α)

$x + 2x < 6 + 7$ ...(β)

$2x + 3x < 5 + 7$ ...(θ)

De (α), (β) y (θ):

$$x < \frac{12}{5} \qquad \ldots (VI)$$

Finalmente:

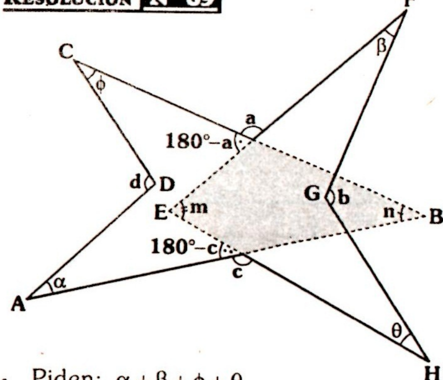
$$\frac{7}{4} < x < \frac{13}{6}$$

Es decir:

$$1{,}75 < x < 2{,}16$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 89



- Piden: $\alpha+\beta+\phi+\theta$
- Dato: $a+b+c+d=518°$
- En ⋗ABCD: $d=\alpha+\phi+n$ ... (I)
- En ⋖HEFG: $b=\beta+\theta+m$ ... (II)
- Sumando (I) y (II):

$$b+d=\alpha+\beta+\phi+\theta+m+n \quad ...\ (III)$$

- En ⊳:

$$m+n=180°-a+180°-b \quad ...\ (IV)$$

- Reemplazando (IV) en (III):

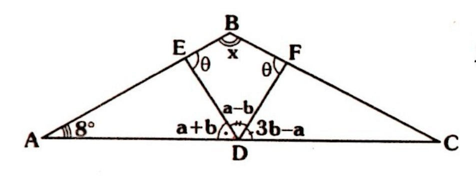
$$b+d=\alpha+\beta+\phi+\theta+360°-a-b$$

$$\Rightarrow \underbrace{a+b+c+d}_{518°}=\alpha+\beta+\phi+\theta+360°$$

$$\therefore\ \alpha+\beta+\phi+\theta=158°$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 90



- Nos piden: x
- Dato **b** toma su mayor valor entero
- Analicemos **b**:
  - $a-b>0° \Rightarrow a>b$ ... (I)
  - $3b-a>0° \Rightarrow 3b>a$ ... (II)
  - $a+b+a-b+3b-a=180°$

$$\Rightarrow a+3b=180° \quad ...\ (III)$$

- En (I): $a>b \Rightarrow \underbrace{a+3b}_{180°}>b+3b$

$$\Rightarrow 45°>b \quad ...(\alpha)$$

- En (II): $3b>a \Rightarrow 3b+3b>\underbrace{a+3b}_{180°}$

$$\Rightarrow b>30° \quad ...(\beta)$$

- De (α) y (b): $30°<b<45°$

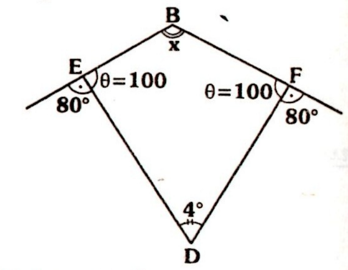
Luego del dato: $b=44°$

- En (I): $a+3(44°)=180° \Rightarrow a=48°$
- En ΔAED , por ángulo exterior:

$$\theta=8°+a+b$$

$$\theta=8°+48°+44 \Rightarrow \theta=100°$$

- Del gráfico:



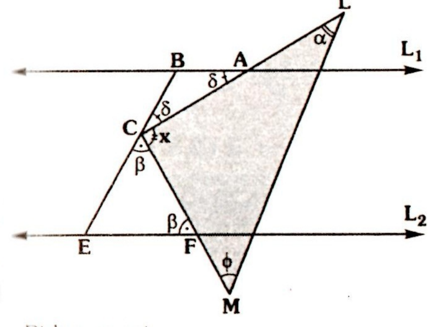
- Por teorema 6:

$$x+4°=80°+80°$$

$$\therefore\ x=156°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 91



- Piden $\alpha+\phi$
- En ΔMCL : $\alpha+\phi+x=180°$ ... (a)

ΔFCE y ΔABC : isósceles

- También: $x+\beta+\delta=180°$ ... (I)
- Por teorema de las paralelas:

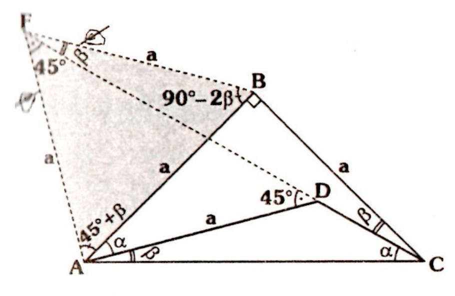
$$x=\beta+\phi \quad ...\ (II)$$

- De (I) y (II): $x+x=180° \Rightarrow x=90°$
- En (a): $\alpha+\phi+90°=180°$

$$\therefore\ \alpha+\phi=90°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 92



Nos piden α

Como $AB=BC \Rightarrow \alpha+\beta=45°$ ... (I)

- Se prolonga $\overline{CD}$ y se traza $\overline{BF}$ tal que $BF=BC=a \Rightarrow m\measuredangle BFC=\beta$ y $m\measuredangle FBA=90°-2\beta$
- Se tendrá luego $BF=BA=a$

$$\Rightarrow m\measuredangle BFA=m\measuredangle BAF=45°+\beta$$

$$\Rightarrow m\measuredangle DFA=45°$$

- Como:

$$m\measuredangle DFA=m\measuredangle ADF \Rightarrow AF=AD=a$$

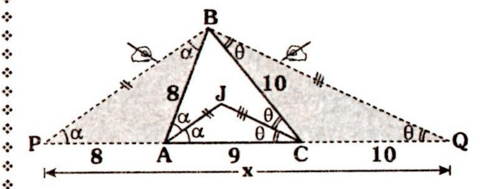
$$\Delta AFB: \text{ equilátero } \Rightarrow 45°+\beta=60°$$

$$\Rightarrow \beta=15°$$

$$\therefore\ \alpha=30°$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 93



- Nos piden: x
- Por dato: $\overline{AJ}//\overline{PB}$ y $\overline{CJ}//\overline{QB}$

$$\Rightarrow \Delta PAB \text{ y } \Delta CBQ: \text{isósceles}$$

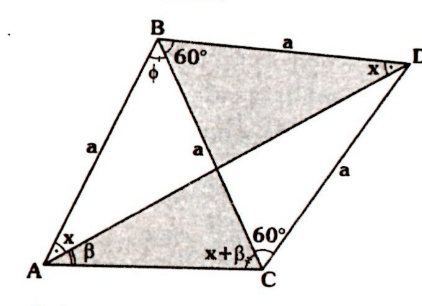
$$\Rightarrow AP=AB=8 \text{ y } CB=CQ=10$$

$$\Rightarrow x=8+9+10$$

$$\therefore\ x=27$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 94



- Piden: x
- Dato: $\phi - \beta = 10°$
- ΔBCD es equilátero
- ΔABC isósceles (ABC=BC)

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle ACB = x + \beta$$

- En la parte sombreada ($\bowtie$):

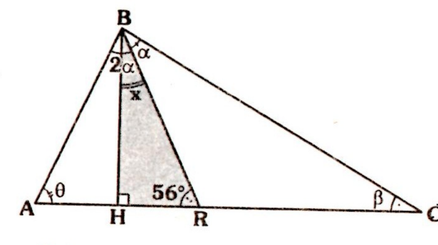
$$x + \beta + \beta = x + 60°$$
$$\Rightarrow \beta = 30°$$

- Del dato: $\phi - \beta = 10° \Rightarrow \phi = 40°$
- En ΔABD:

$$x + x + 60° + \phi = 180°$$
$$\therefore \mathbf{x = 40°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 95



- Piden x:
- Dato: $\theta - 2\beta = 12°$
- Del dato: $\theta = 12° + 2\beta$

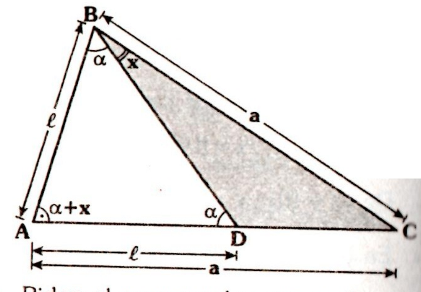
$$\Delta ABC : 3\alpha + \underbrace{(12° + 2\beta)}_{\theta} + \beta = 180°$$
$$\Rightarrow \alpha + \beta = 56°$$

- ◺HBR: $x + 56° = 90°$

$$\therefore \mathbf{x = 34°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 96



- Piden el mayor valor entero de x.
- Dato: AB=AD y AC=BC

ΔABD y ΔDBC: isósceles

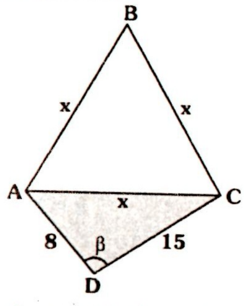
- En ΔABD: $3\alpha + x = 180°$
- En ΔBCD: $x < \alpha$

$$\Rightarrow 3x < 3\alpha$$
$$4x < \underbrace{3\alpha + x}_{180°}$$
$$x < 45°$$

∴ **El mayor valor entero de x es 44°.**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 97



- Piden el menor valor entero del perímetro de ▲ABC.

$$Perím_{\blacktriangle ABC} = 3x$$

- En ΔADC, por existencia

$$15 - 8 < x < 15 + 8 \Rightarrow 7 < x < 23 \quad \ldots (I)$$

- Como: $\beta > 90° \Rightarrow x > 15 \quad \ldots (II)$
- Por teorema 21:

$$x^2 > 8^2 + 15^2 \Rightarrow x > 17 \quad \ldots (III)$$

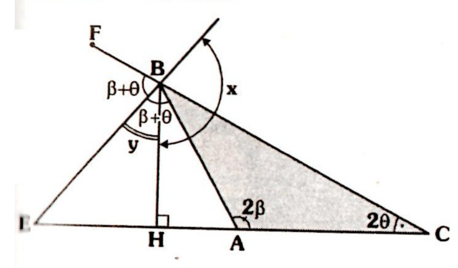
- De (I), (II) y (III):

$$17 < x < 23$$
$$\Rightarrow 51 < \underbrace{3x} < 69$$
$$51 < perím_{(\blacktriangle ABC)} < 69$$

∴ **El menor valor entero del perímetro de ▲ABC es 52.**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 98



- Piden: x
- Dato: $2\beta - 2\theta = 112°$

$$\Rightarrow \beta - \theta = 56°$$

- Como $\overline{BE}$ es bisectriz exterior:

$$m\sphericalangle FBE = m\sphericalangle EBA = \beta + \theta$$

- También: $m\sphericalangle HBA = \beta + \theta - y$
- En ◺HBA, por ángulo exterior:

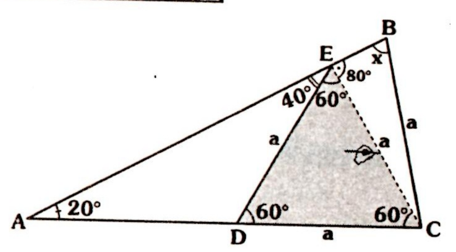
$$2\beta = 90° + \beta + \theta - y$$
$$y + \underbrace{\beta - \theta}_{56°} = 90°$$
$$\Rightarrow y = 34°$$

- Como: $x + y = 180°$

$$\therefore \mathbf{x = 146°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 99

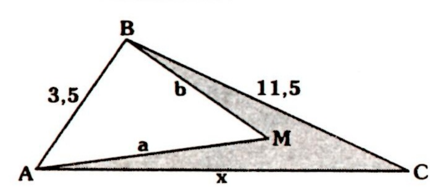


- Piden: x
- Dato: ED = DC = BC
- Como $m\sphericalangle EDC = 60°$ y ED=DC, al trazar $\overline{BC}$, el triángulo EDC es equilátero $\Rightarrow EC = a$ y $m\sphericalangle BEC = 80°$
- ΔEBC isósceles:

$$\therefore \mathbf{x = 80°}$$

Clave D

Resolución N° 100



- Nos piden la cantidad de valores enteros de x.
- Dato: $a+b=20$
- ΔABC: existencia

$11{,}5-3{,}5<x<11{,}5+3{,}5 \Rightarrow 8<x<15$ ... (I)

- Por teorema 41:

$\underbrace{a+b}_{20}<x+11{,}5 \Rightarrow 8{,}5<x$ ... (II)

- De (I) y (II):

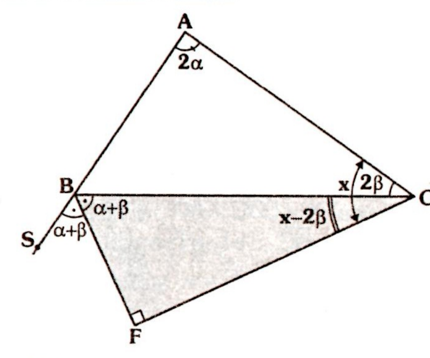
$8{,}5<x<15$

- Los valores enteros de x son:

{9;10;11;12;13;14}

Clave A

Resolución N° 101



- Piden: x
- Dato: $2\alpha-2\beta=140°$

$\Rightarrow \alpha-\beta=70°$ ... (I)

- Como $\overline{BF}$ es bisectriz de $\sphericalangle CBS$:

$m\sphericalangle SBF = m\sphericalangle FBC = \alpha+\beta$

- En ◺BFC:

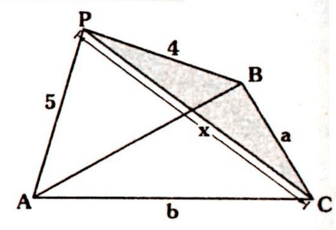
$x-2\beta+\alpha+\beta=90°$

$\Rightarrow x+\underbrace{\alpha-\beta}_{70°}=90°$

$\therefore$ **x = 20°**

Clave A

Resolución N° 102



- Piden el mayor valor entero de PC.
- Dato: $a+b=11$
- Por existencia en:

ΔPBC: $x<a+4$ ... (I)

ΔAPC: $x<b+5$ ... (II)

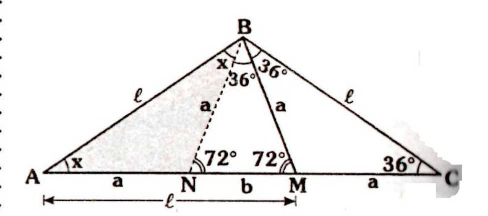
- Sumando (I) y (II):

$2x<\underbrace{a+b}_{11}+9 \Rightarrow x<10$

- Por lo tanto el mayor valor entero de x es **9**.

Clave D

Resolución N° 103



- Piden: x
- Dato: AM = BC y BM = MC
- Se traza $\overline{BN}$, tal que $m\sphericalangle BNM=72°$

$\Rightarrow$ ΔNBM y ΔBCM isósceles

$\Rightarrow$ NB = BM = MC = a

ΔNBC: isósceles $\Rightarrow \ell = a+b$

- Como $AM=\ell$ y $NM=b \Rightarrow AN=a$

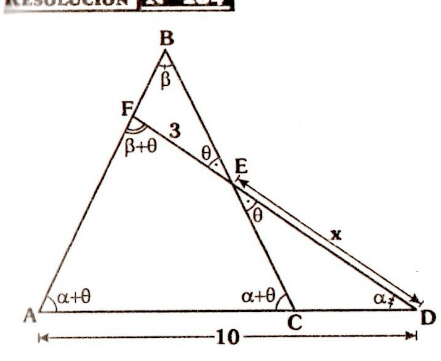
ΔANB: isósceles

$x+x=72°$

$\therefore$ **x = 36°**

Clave B

Resolución N° 104



- Nos piden el mínimo valor entero de x
- Dato: $\alpha>\beta$
- Como

$AB=BC \Rightarrow m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle ACB = \alpha+\theta$

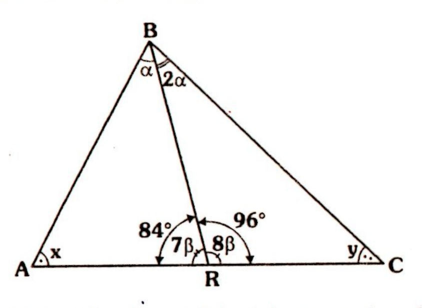
- Como $\alpha>\beta \Rightarrow \alpha+\theta>\beta+\theta$, en el ΔAFC, por teorema de la correspondencia.

$x+3>10 \Rightarrow x>7$

$\therefore$ $\mathbf{x_{(mínimo\ entero)}=8}$

Clave C

Resolución N° 105



- Nos piden la medida del menor ángulo interior del ΔABC.
- Dato: ΔABC escaleno, $x<74°$, $y<74°$ y $3\alpha<74°$

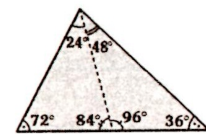
$x, y, (3\alpha) \in \mathbb{Z}^+$

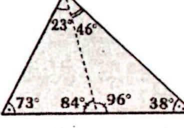
$7\beta+8\beta=180° \Rightarrow \beta=12°$

- Del dato: $3\alpha<74° \Rightarrow \alpha<\dfrac{74°}{3}$
- En ΔABR: $x+\alpha=96°$
- Como: $\alpha<\dfrac{74°}{3} \Rightarrow \underbrace{x+\alpha}_{96°}<\dfrac{74°}{3}+x$

$\Rightarrow 71{,}3°<x$

- Del dato: $71{,}3°<x<74°$
- Los valores enteros de **x** son 72° y 73° con ello tenemos los siguientes triángulos:



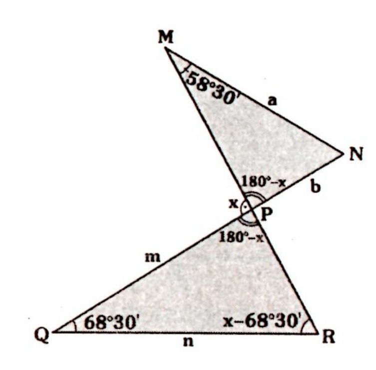


- El único triángulo escaleno es el segundo, ya que el primero es isósceles

Por lo tanto la medida del menor ángulo es 38°.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 106



- Nos piden el mayor valor entero de x
- Dato: $a > b$ y $m < n$
- En ΔPQR y ΔMNP :

$$x > 68°30' \wedge x > 58°30'$$

$$\Rightarrow x > 68°30' \quad ...\text{(I)}$$

- Por teorema de la correspondencia:

- $a > b \Rightarrow 180° - x > 58°30'$

$$\Rightarrow 121°30' > x \quad ...\text{(II)}$$

- $m < n \Rightarrow x - 68°30' < 180° - x$

$$\Rightarrow x < 124°15' \quad ...\text{(III)}$$

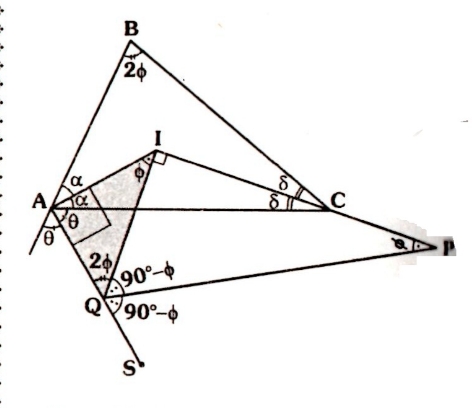
- De (I), (II) y (III):

$$68°30' < x < 121°30'$$

$$\therefore x_{(\text{mayor entero})} = 121°$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 107



- Nos piden: ϕ
- Como $\overline{AI}$ y $\overline{AQ}$ son bisectrices

$$\Rightarrow m\measuredangle QAI = 90°$$

- En ΔABC, por ángulo entre bisectrices (teorema 25)

$$m\measuredangle AIC = 90° + \frac{(2\phi)}{2} = 90° + \phi$$

$$\Rightarrow m\measuredangle AIQ = \phi$$

- En ⊿AIQ: como $\overline{QP}$ es bisectriz

$$\Rightarrow m\measuredangle IQP = m\measuredangle PQS = 90° - \phi$$

$$\Rightarrow m\measuredangle AQI = 2\phi$$

- En ⊿AIQ: $\phi + 2\phi = 90°$

$$\therefore \phi = 30°$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 108

- Tenemos la ecuación:

$$x^3 - 7x^2 + 12x - nx^2 + 7nx - 12n = 0$$

- Por dato las raíces representan las longitudes de los lados de un triángulo

Nos piden la suma de los valores enteros de n.

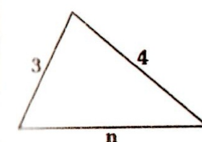
Factorizando:

$$x(x^2 - 7x + 12) - n(x^2 - 7x + 12) = 0$$

$$= 0$$

$$(x - n)(x - 3)(x - 4) = 0$$

Las raíces son: n, 3 y 4:



- Por existencia:

$$1 < n < 7$$

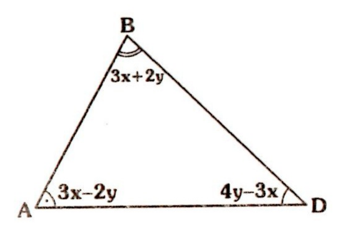
Los valores entero de **n**, son: {2;3;4;5;6}

$$\Rightarrow S = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$\therefore \mathbf{S = 20}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 109



- Nos piden el menor valor entero de y múltiplo de 3.
- Del gráfico, tendremos las siguientes restricciones:

$$3x - 2y > 0° \Rightarrow 3x > 2y \quad ...\text{(I)}$$

$$4y - 3x > 0° \Rightarrow 4y > 3x \quad ...\text{(II)}$$

- En ΔABD :

$$3x - 2y + 3x + 2y + 4y - 3x = 180°$$

$$\Rightarrow 3x + 4y = 180°$$

- En (I): $\underbrace{3x + 4y}_{180°} > 2y + 4y$

$$30° > y \quad ...(\alpha)$$

- En (II): $4y + 4y > \underbrace{3x + 4y}_{180°}$

$$y > \frac{45°}{2} \quad ...(\beta)$$

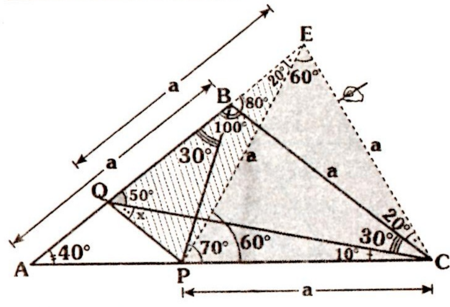
- De (α) y (β):

$$\frac{45°}{2} < y < 30°$$

- Por lo tanto el menor valor de y, múltiplo de 3 es **24°**.

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 110



- Nos piden: x
- De los datos: $AB = BC = PC$
- Se prolonga $\overline{AB}$ y se traza $\overline{CE}$ tal que $m\measuredangle AEC = 80° \Rightarrow \Delta BCE$ y ΔQEC : isósceles $\Rightarrow EC = QE = a$

- Como $m\measuredangle PCE = 60°$ y $PC = EC \Rightarrow$ el ΔPCE es equilátero.

$\Rightarrow PE = a$ y $m\measuredangle QEP = 20°$

- Como: $QE = EP \Rightarrow \Delta QPE$ isósceles

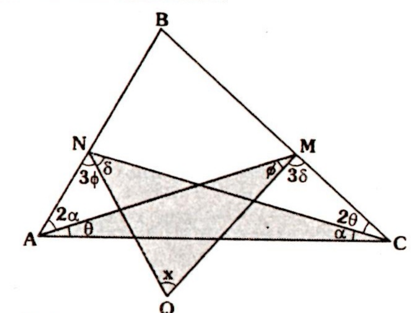
$\Rightarrow m\measuredangle EQP = m\measuredangle QPE = 80°$

$50° + x = 80°$

$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$

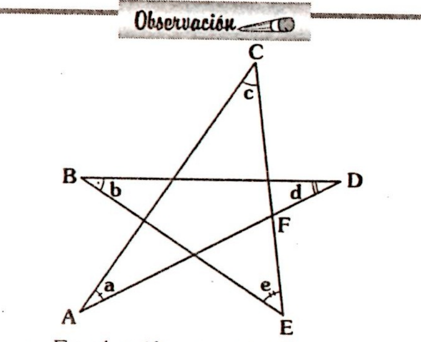
Clave C

RESOLUCIÓN Nº 111



- Piden: x

Observación



- *En el gráfico se cumple:*

$a + b + c + d + e = 180°$

Demostración:

$\measuredangle BDFE$: $m\measuredangle DFE = b + d + e$

ΔACF: $a + c + d + e = 180°$

- De la observación:

$x + \theta + \alpha + \phi + \delta = 180°$ ... (I)

- En ΔAMC y ΔANC:

$3\delta + 3\theta + \alpha + \phi = 180°$ ... (II)

$3\phi + 3\alpha + \delta + \theta = 180°$ ... (III)

- Sumando (II) y (III):

$4(\delta + \theta + \alpha + \phi) = 360°$

$\Rightarrow \delta + \theta + \alpha + \phi = 90°$ ... (IV)

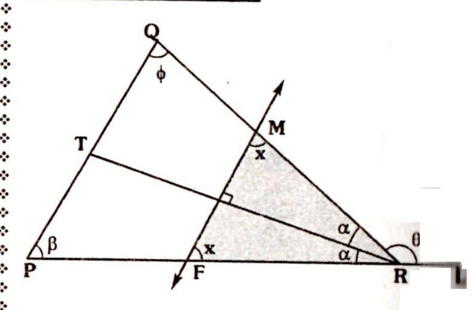
- De (IV) y (I):

$x + 90° = 180°$

$\therefore\ \mathbf{x = 90°}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 112



- Nos piden: x
- Dato: $\beta + \phi = \theta$
- Como: $x + \alpha = 90° \Rightarrow m\measuredangle RFM = x$
- ΔPQR: por ángulo exterior

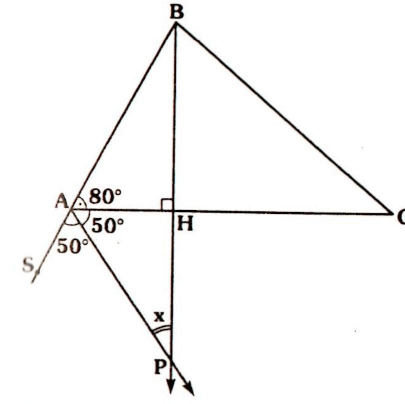
$m\measuredangle LRQ = \underbrace{\beta + \phi}_{\theta} \Rightarrow m\measuredangle LRQ = \theta$

- ΔFMR: $x + x = \theta$

$\therefore\ \mathbf{x = \dfrac{\theta}{2}}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 113



- Piden: x
- Dato: $m\measuredangle ABC + m\measuredangle ACB = 100°$

$\Rightarrow m\measuredangle BAC = 80°$

- Como $\overrightarrow{AP}$ es bisectriz

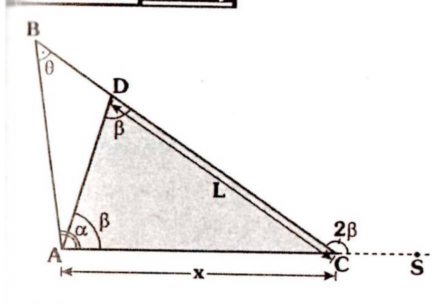
$\Rightarrow m\measuredangle SAP = m\measuredangle CAP = 50°$

En $\triangle AHP$: $x + 50° = 90°$

$\therefore\ \mathbf{x = 40°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 114



- Piden: x
- Dato: $CD = L$ y $\alpha + \theta = 2\beta$

- Por ángulo exterior en:

- ΔABC: $m\measuredangle SCB = \alpha + \theta$

$\Rightarrow m\measuredangle DCS = 2\beta$

- ΔADC: $m\measuredangle CAD + \beta = 2\beta$

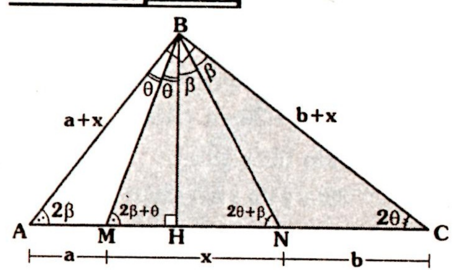
$\Rightarrow m\measuredangle CAD = \beta$

$\Rightarrow \Delta ADC$: isósceles

$\therefore\ \mathbf{x = L}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 115



- Piden: x
- Dato: $AB + BC - AC = k$
- En $\triangle ABC$:

$m\measuredangle BAC = m\measuredangle HBC = 2\beta$

$m\measuredangle ACB = m\measuredangle HBA = 2\theta$

- Como: $m\measuredangle ANB = m\measuredangle ABN$ y $m\measuredangle NMB = MBC$

$\Rightarrow \Delta ABN$ y ΔMBC : isósceles

$\Rightarrow AB = a + x$ y $BC = b + x$

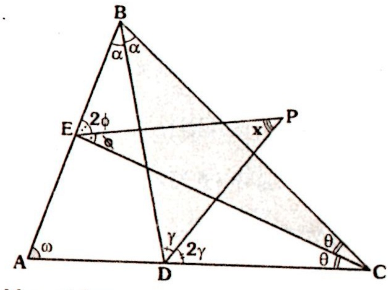
- En el dato:

$(a + x) + (b + x) - (a + b + x) = k$

$\therefore\ \mathbf{x = k}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 116



- Nos piden: x
- En la región sombreada, de la observación del problema 111.

$$x+\theta+\gamma+\phi+\alpha=180° \quad \ldots (I)$$

- En ΔEBC y ΔBDC :

$$3\phi+2\alpha+\theta=180° \quad \ldots (II)$$

$$3\gamma+2\theta+\alpha=180° \quad \ldots (III)$$

- Sumando (II) y (III):

$$3(\theta+\gamma+\phi+\alpha)=360°$$

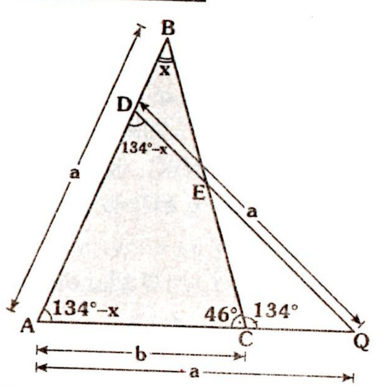
$$\Rightarrow \theta+\gamma+\phi+\alpha=120°$$

- En (I): $x+120°=180°$

$$\therefore \ \mathbf{x=60°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 117



- Piden el valor entero de x
- Como: $C\in\overline{AQ}\Rightarrow a>b$
- ΔACQ por teorema de la correspondencia:

$$b<a\Rightarrow x<46° \quad \ldots (I)$$

- ΔQAD : isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle QAD=m\measuredangle ADQ=134°-x$$

- También se cumple (*por teorema 17*)

$$134°-x<90°\Rightarrow 44°<x \quad \ldots (II)$$

- De (I) y (II):

$$44°<x<46$$

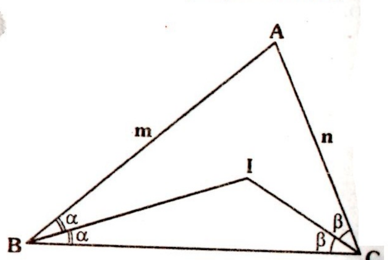
- El valor entero de x es **45°**.

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 118

- Analicemos las proposiciones:

I



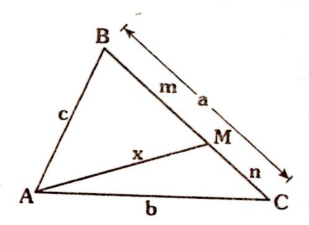
- Como: $m>n\Rightarrow 2\beta>2\alpha$

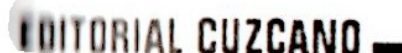
$$\Rightarrow \beta>\alpha$$

- En ΔAIC : $\beta>\alpha\Rightarrow IB>IC$

La proposición es verdadera.

II





- Sea: $p=\dfrac{a+b+c}{2}$
- En ΔABM y ΔAMC :

$$x<b+n$$

$$x<c+m$$

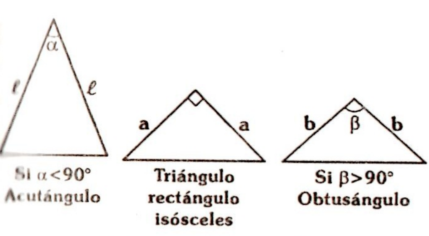
$$2x<b+c+\underbrace{m+n}_{a}$$

$$\Rightarrow x<\frac{a+b+c}{2}$$

$$x<p$$

La proposición es verdadera.

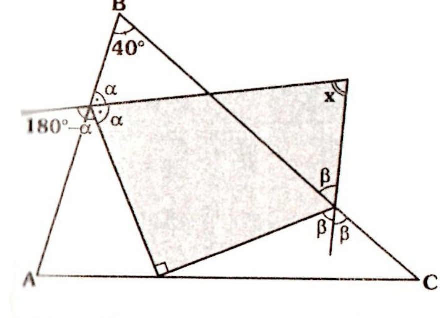
III Si un triángulo es isósceles, este puede ser acutángulo, rectángulo u obtusángulo, asi tenemos:



La proposición es F.

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 119



Nos piden: x

- En la región sombreada, por teorema 6

$$x+90°=180°-\alpha+\beta$$

$$x=90°+\beta-\alpha \quad \ldots (I)$$

- En ∢:

$$x+\beta=40°+\alpha \quad \ldots (II)$$

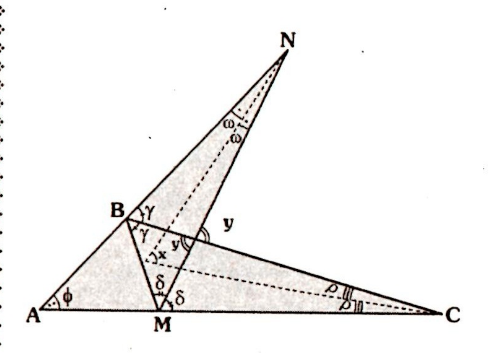
- Sumando (I) y (II):

$$2x=130°$$

$$\therefore \ \mathbf{x=65°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 120



- Nos piden x en función de φ
- En ∢ por teorema 29:.

$$x=\frac{\phi+y}{2} \quad \ldots (I)$$

- En ΔABM , por ángulo entre bisectrices (teorema 26):

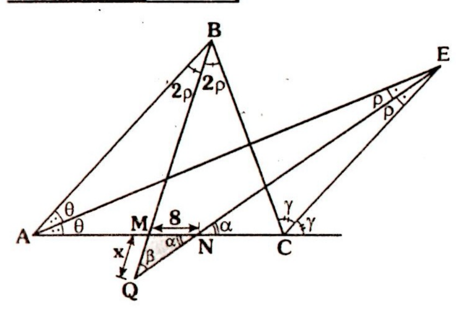
$$y=90°-\frac{\phi}{2}$$

- En (I):

$$\mathbf{x=45°+\frac{\phi}{4}}$$

Clave C

Resolución Nº 121



- Piden: x
- Dato: MN = 8
- Por ángulo entre bisectrices, en el ΔABC (teorema 27), en ΔABC:

$$m\measuredangle AEC=\frac{m\measuredangle ABC}{2}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle ABM=m\measuredangle MBC=2\rho$$

- Como $\overline{EN}$ es bisectrices del ∡AEC

$$m\measuredangle AEN=m\measuredangle NEC=\rho$$

- En ΔAEN: $\alpha=\theta+\rho$ ... (I)
- En (figura):

$$\theta+2\rho=\beta+\rho\Rightarrow\beta=\theta+\rho \quad \text{... (II)}$$

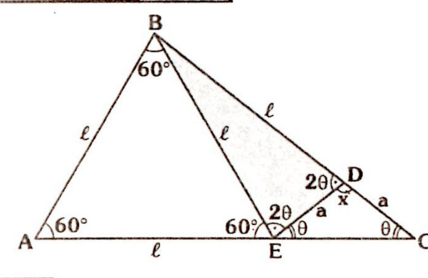
- De (I) y (II):

$$\alpha=\beta\Rightarrow \Delta QMN:\text{ isósceles}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=8}$$

Clave B

Resolución Nº 122

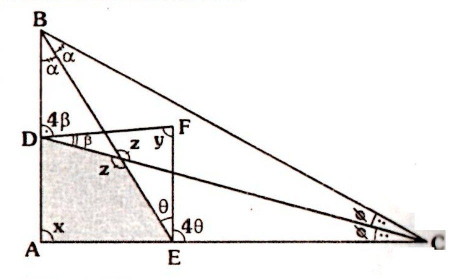


- Piden: x
- Como: AB = AE y $m\measuredangle BAE=60°\Rightarrow\Delta ABE$ es equilátero $\Rightarrow BE=\ell$ y $m\measuredangle AEB=60°$
- ΔEBD: isósceles
- Se tiene: $x+2\theta=180°$ ... (I)
- También: $\theta+2\theta+60°=180°\Rightarrow\theta=40°$
- En (I): $x+2(40°)=180°$

$$\therefore\ \mathbf{x=100°}$$

Clave C

Resolución Nº 123



- Nos piden: x
- Dato: $x+y=180°$
- En ⏢ DFEA, por teorema 6:

$$\underbrace{x+y}_{180°}=4\beta+4\theta\Rightarrow\beta+\theta=45°$$

- En ΔABC por ángulo entre bisectrices (*teorema 25*):

$$z=90°+\frac{x}{2} \quad \text{... (I)}$$

- En la región sombreada (*teorema 6*)

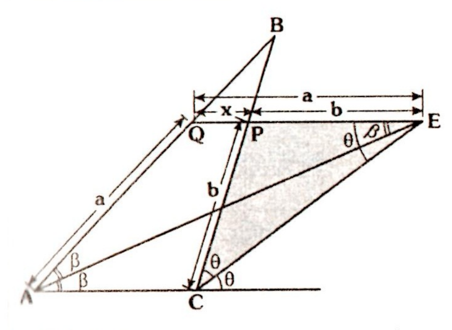
$$x+z=5\beta+5\theta$$

$$\Rightarrow x+90°+\frac{x}{2}=5\underbrace{(\beta+\theta)}_{45°}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=90°}$$

Clave C

Resolución Nº 124



- Piden: x
- Dato: $a-b=\ell$ y $\overline{QE}\parallel\overline{AC}$
- Por ángulo entre paralelas:

$$m\measuredangle QEA=\beta \text{ y } m\measuredangle CEP=\theta$$

- ΔCPE y ΔAQE: isósceles

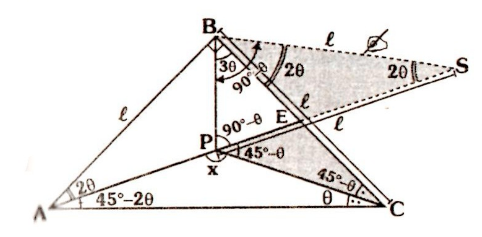
$$\Rightarrow AQ=QE=a \text{ y } CP=PE=b$$

$$\Rightarrow x=a-b$$

$$\therefore\ \mathbf{x=\ell}$$

Clave A

Resolución Nº 125



- Piden: x
- Dato: AB = BC
- En ΔAPC: $x+45°-\theta=180°$

$$\Rightarrow x=135°+\theta \quad \text{... (I)}$$

- Se prolonga $\overline{AP}$ ($m\measuredangle BPE=90°-\theta$) y se traza $\overline{BS}$ tal que $m\measuredangle BSP=2\theta$

$$\Rightarrow \Delta ABS \text{ y } \Rightarrow \Delta PBS \text{ son isósceles}$$

$$AB=BS=PS=\ell$$

- Como $PS=BC$ y ΔPEC isósceles

$$\Rightarrow BE=ES\Rightarrow\Delta BES:\text{ isósceles}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle EBS=2\theta$$

- m∡PBS: $3\theta+2\theta=90°-\theta$

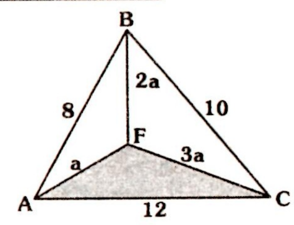
$$\Rightarrow \theta=15°$$

- En (I): $x=135°+15°$

$$\therefore\ \mathbf{x=150°}$$

Clave E

Resolución Nº 126



Analicemos "a" para ello encontremo el menor intervalo para "a".

- Por existencia:

$$2a-a<8<2a+a$$

$$3a-2a<10<3a+2a$$

$$3a-a<12<3a+a$$

$$\Rightarrow 3<a<6 \quad \text{...}$$

- Por teorema 50:

$$a+2a+3a<\overbrace{10+12}^{\text{Dos mayores}}$$

$$\Rightarrow a<\frac{11}{3} \quad \text{... }(\beta)$$

- Por teorema 41:

$$a + 2a < 12 + 10$$
$$2a + 3a < 8 + 12$$
$$a + 3a < 8 + 10$$
$$\Rightarrow \quad a < 4 \qquad \ldots(\gamma)$$

De (α), (β) y (γ):

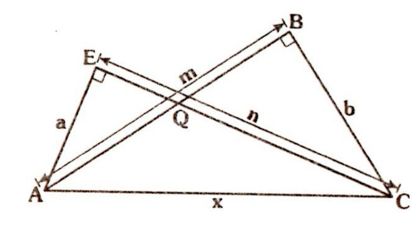
$$3 < a < \frac{11}{3}$$

Ahora busquemos, la expresión pedida:

$$24 < \underbrace{4a + 12} < \frac{80}{3}$$
$$24 < \text{Perim.}_{(\Delta AFC)} < 26,6$$

Clave A

Resolución Nº 127



- Nos piden la suma de valores de x.
- Dato: $m + n = 12$; $a + b = 6$; $m > b$ y $n > a$.
- En ⊿AEC y ⊿ABC:

$$x > n \qquad \ldots(I)$$
$$x > m \qquad \ldots(II)$$

- Sumando (I) y (II):

$$2x > \underbrace{m+n}_{12} \Rightarrow x > 6$$

- Por existencia; en:

⊿AEC: $x < a + n$ ...(III)

⊿ABC: $x < b + m$ ...(IV)

- Sumando (III) y (IV):

$$2x < \underbrace{a+b}_{6} + \underbrace{m+n}_{12} \Rightarrow x < 9$$

- Luego se tendrá: $6 < x < 9$
- Los valores enteros de x, son: 7 y 8
- Por lo tanto, la suma de valores enteros de x, es 15.

Clave C

Nota

Nos faltaría la restricción, para los triángulos rectángulos.

Se plantearía, el siguiente teorema:

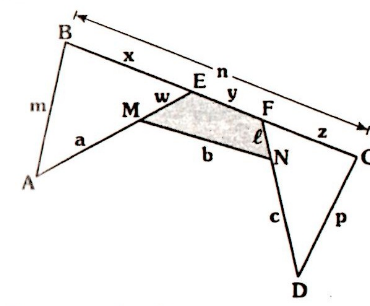
$$MC > MA$$

$$\sqrt{\frac{a^2+n^2}{2}} \geq \frac{a+n}{2} \quad y \quad \sqrt{\frac{b^2+m^2}{2}} \geq \frac{b+m}{2}$$

Con esto se llega: $x \geq \underbrace{\frac{9}{2}\sqrt{2}}_{6,36}$

Los valores obtenidos no varían.

Resolución Nº 128



- Dato: $n - b = k$
- Analicemos las relaciones entre a; b; c; m; n; y p.
- Por existencia en:

$\Delta ABE: \; a + w < m + x$ ...(I)

$\Delta DEC: \; c + \ell < p + z$ ...(II)

- Por teorema 54:

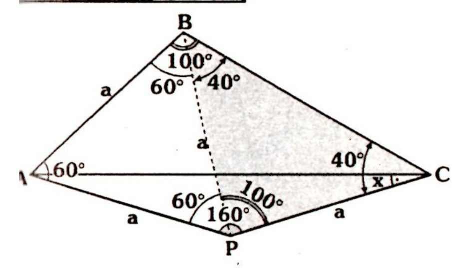
$$b < w + y + \ell \qquad \ldots(III)$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$a + b + c + \cancel{w+\ell} < m + p + \underbrace{x+y+z}_{n} + \cancel{w+\ell}$$
$$\Rightarrow a + b + c < m + n + p$$
$$a + c < m + p + \underbrace{n-b}_{k}$$
$$\therefore a + c < m + p + k$$

Clave C

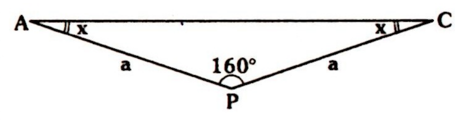
Resolución Nº 129



- Piden: x
- Como $AB = AP$ y $m\measuredangle BAP = 60° \Rightarrow$ al trazar $\overline{BP}$, el triángulo ABP es equilátero $\Rightarrow m\measuredangle PBC = 40°$; $BP = a$ y $m\measuredangle BPC = 100° \Rightarrow m\measuredangle PCB = 40°$

$$\Rightarrow \Delta BCP \text{ es isósceles} \Rightarrow PC = a$$

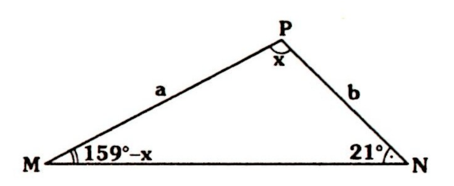
- Del gráfico:



$$x + x + 160° = 180°$$
$$\therefore \mathbf{x = 10°}$$

Clave A

Resolución Nº 130

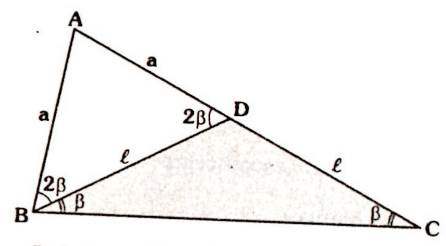


- Nos piden el mínimo valor entero de x
- Dato: $a > b$
- Por teorema de la correspondencia:

$$21° > 159° - x$$
$$\Rightarrow x > 138°$$
$$\therefore x_{(\text{mínimo entero})} = \mathbf{139°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 131



- Piden: m∢B en función de m∢C
- Sea m∢C = β
- ΔBDC y ΔBAD : isósceles

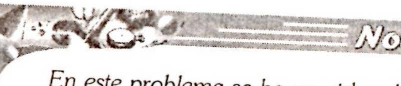
⇒ m∢DBC = m∢BCD = β

m∢ABD = m∢ADB = 2β

⇒ m∢B = 3β

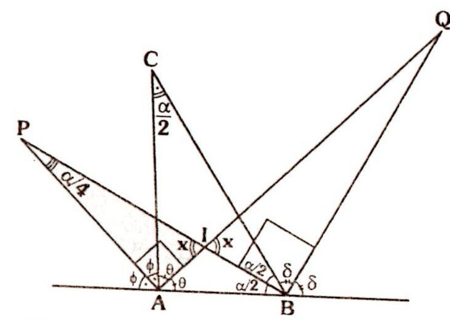
∴ **m∢B = 3(m∢C)**

Clave C



En este problema se ha considerado la notación m∢C, la cual hace referencia a m∢ACB y m∢B = m∢ABC.

RESOLUCIÓN Nº 132



- Piden: x
- Se tiene entonces:

m∢PAQ = m∢PBQ = 90°

- Por ángulo entre bisectrices (*teorema 27*)

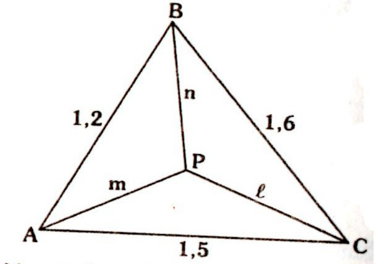
$$m∢APB = \frac{\alpha}{4}$$

- En ◺IAP: $x + \frac{\alpha}{4} = 90°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 90° - \frac{\alpha}{4}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 133



- Nos piden el valor de: m + n + ℓ por teorema 42 y 50:

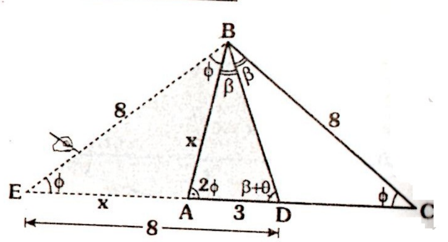
$$\frac{1,2+1,6+1,5}{2} < m+n+\ell < 1,6+1,5$$

$$2,1 < m+n+\ell < 3,1$$

- Por lo tanto el valor entero de m + n + ℓ es **3**.

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 134



- Nos piden: AB
- De acuerdo a los criterios de trazos auxiliares. Se prolonga $\overline{CA}$ y se traza $\overline{BE}$ tal que m∢BEC = ϕ ⇒ ΔABE y ΔEBD son isósceles.

⇒ EB = BC = 8 y EA = AB = x

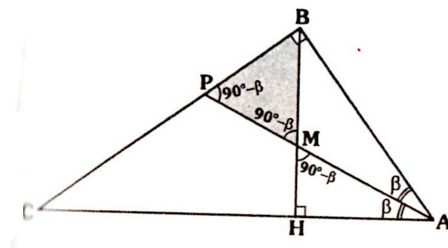
- Como: m∢EBC = m∢EDB = β + ϕ

⇒ x + 3 = 8

∴ **x = 5**

Clave C

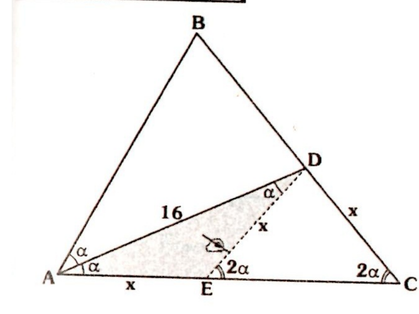
RESOLUCIÓN Nº 135



- Nos piden verificar que tipo de triángulo es MBP.
- En ◺HMA: m∢AMH = 90° − β
- En ◺ABP: m∢BPA = 90° − β
- Por lo tanto el triángulo MBP **es isósceles.**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 136



- Nos piden la menor longitud de x.
- En ΔADC por teorema de la correspondencia.
- Como:

m∢DAC < m∢ACD ⇒ x < 16 ... (I)

- Se traza $\overline{DE}$ tal que m∢ADE = α

⇒ ΔADE y ΔEDC : isósceles

⇒ AE = ED = x

- En ΔADE, por existencia:

16 < x + x ⇒ 8 < x ... (II)

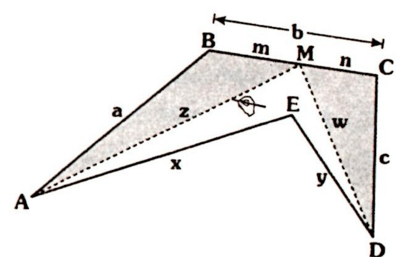
- De (I) y (II):

8 < x < 16

∴ $\mathbf{x_{(mínimo\ entero)} = 9}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 137



- Piden demostrar: x + y < a + b + c
- Por existencia en:

ΔABM : z < a + m ... (I)

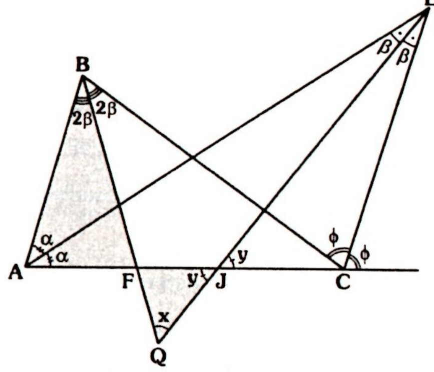
ΔMCD : w < c + n ... (II)

- En AMDE: x + y < z + w ... (III)
- Sumando (I), (II) y (III)

$$x + y + \cancel{z+w} < a + c + \underbrace{m+n}_{b} + \cancel{z+w}$$

$$\therefore\ \mathbf{x + y < a + b + c}$$

RESOLUCIÓN Nº 138



- Nos piden demostrar que el triángulo FQJ es isósceles
- En ΔABC, por ángulo entre bisectrices (*teorema* 27):

$$m\measuredangle AEC = \frac{m\measuredangle ABC}{2}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle AEJ = m\measuredangle JEC = \beta$$

$$\Rightarrow m\measuredangle ABF = m\measuredangle FBC = 2\beta$$

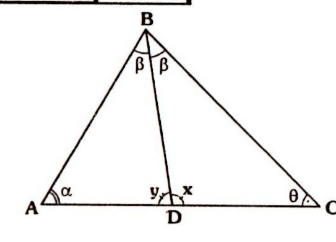
- En $\Delta AEJ: y = \alpha + \beta$
- En la parte sombreada (⧖):

$$x + y = 2\alpha + 2\beta$$

$$x + y = 2\underbrace{(\alpha + \beta)}_{y} \Rightarrow x = y$$

- Por lo tanto el triángulo FQJ es isósceles.

RESOLUCIÓN Nº 139



- Piden demostrar: $x - y = \alpha - \theta$
- Por ángulo exterior:

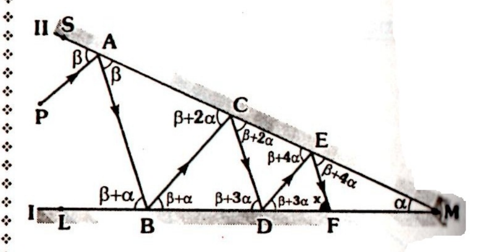
En $\Delta ABD: \ x = \alpha + \beta$

En $\Delta BDC: \ y = \theta + \beta$

$$\Rightarrow x - y = (\alpha + \beta) - (\theta + \beta,$$

$$\therefore \mathbf{x - y = \alpha - \theta}$$

RESOLUCIÓN Nº 140



- Piden: x en función de β y α.
- De la condición (ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión):

$$m\measuredangle SAP = m\measuredangle BAC = \beta$$

$$m\measuredangle ABL = m\measuredangle CBD = \beta + \alpha$$

$$m\measuredangle BCA = m\measuredangle DCE = \beta + 2\alpha$$

$$m\measuredangle CDB = m\measuredangle EDF = \beta + 3\alpha$$

$$m\measuredangle CED = m\measuredangle FEM = \beta + 4\alpha$$

- En ΔEFM, por ángulo exterior:

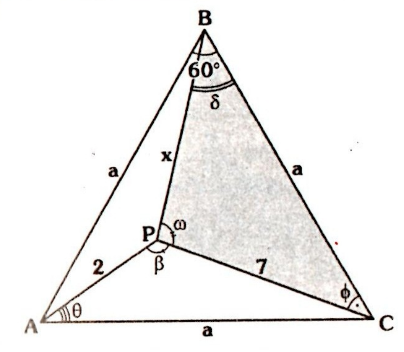
$$x = \beta + 4\alpha + \alpha$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \beta + 5\alpha}$$

Clave E

Solucionario
Ciclo Semestral

RESOLUCIÓN Nº 141



- Nos piden el mayor valor entero de x.
- En ΔAPC, por existencia:

$$7 - 2 < a < 7 + 2 \Rightarrow 5 < a < 9 \quad \text{... (I)}$$

- También $\theta < 60°$ y $60° < \beta \Rightarrow \theta < \beta$
- Por teorema de la correspondencia:

como: $\beta > \theta \Rightarrow a > 7$ ... (II)

- En ⩓ABCP; por teorema 41

$$a + a > 7 + 2 \Rightarrow a > 4{,}5 \quad \text{... (III)}$$

- De (I), (II) y (III):

$$7 < a < 9 \quad \text{... (IV)}$$

- Pero "a" no es entero (*no es dato*)
- En $\Delta BPC: \phi < 60°$ y $60° < \omega \Rightarrow \phi < \omega$

Como: $\phi < \omega \Rightarrow x < a$

Pero: $a < 9 \Rightarrow x < 9$

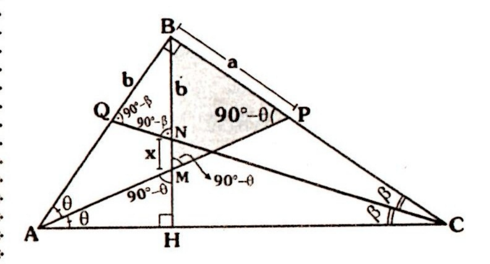
$$\therefore \ \mathbf{x_{(mayor\ entero)} = 8}$$

Clave C



Para acotarlo inferiormente, se puede usar el teorema 41.

RESOLUCIÓN Nº 142



- Piden: x en función de a y b.
- En ◺AHM y ◺NHM:

$$m\measuredangle AMH = 90° - \theta \ \text{y} \ m\measuredangle HNC = 90° - \beta$$

- En ◺QBC y ◺ABP:

$$m\measuredangle BQC = 90° - \beta \ \text{y} \ m\measuredangle APB = 90° - \theta$$

$$\Rightarrow \Delta QBN \text{ isósceles} \Rightarrow BQ = BN = b$$

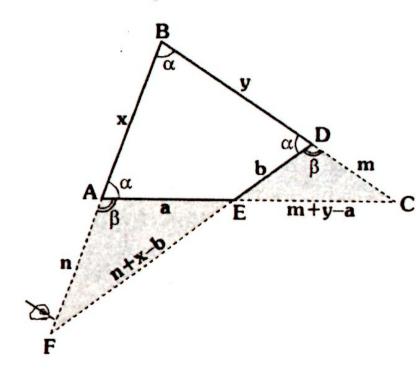
$$\Delta MBP \text{ isósceles} \Rightarrow MB = BP = a$$

$$x + b = a$$

$$\therefore \ \mathbf{x = a - b}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 143



- Nos piden entre que valores está: xy
- ΔBDF y ΔABC : isósceles

$\Rightarrow BC = AC$ y $BF = DF$

- En ΔFAE y ΔEDC :

Como $\alpha < 90° \Rightarrow \beta > 90°$, luego EF y EC son las longitudes de los mayores lados.

$n + x - b > n \Rightarrow x > b$ ... (I)

$m + y - a > m \Rightarrow y > a$ ... (II)

- De (I) y (II): $xy > ab$ ... (α)
- Por existencia de Δ_s :

En ΔEAF : $n + x - b < n + a$

$\Rightarrow x < a + b$ ... (III)

En ΔEDC : $m + y - a < m + b$

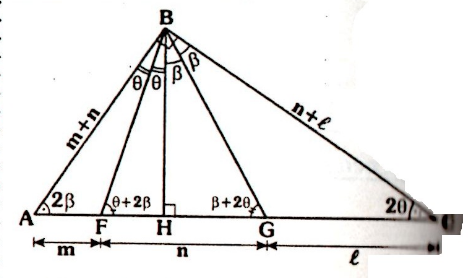
$\Rightarrow y < a + b$ ... (IV)

- De (III) y (IV): $xy < (a+b)^2$ ...(β)
- De (α) y (β) :

$$\mathbf{ab < xy < (a+b)^2}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 144



- Nos piden la relación entre m, n, ℓ
- Por teorema

$m\measuredangle BAC = m\measuredangle HBC = 2\beta$

$m\measuredangle ACB = m\measuredangle HBA = 2\theta$

$\Rightarrow \Delta ABG$ y ΔFBC : isósceles

$AB = AG = m + n$

$FC = CB = n + \ell$

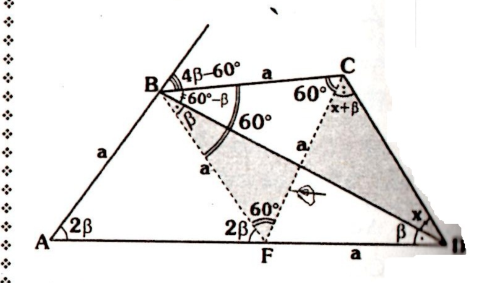
- Por T. de pitágoras:

$$(m+n+\ell)^2 = (m+n)^2 + (n+\ell)^2$$

$$\therefore \mathbf{2m\ell = n^2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 145



- Piden: x
- Como $m\measuredangle BAD = 2(m\measuredangle ADB) \Rightarrow$ trazamos $\overline{BF}$ tal que $m\measuredangle FBD = \beta \Rightarrow \Delta ABF$ y ΔFBD isósceles $\Rightarrow AB = BF = FD = a$

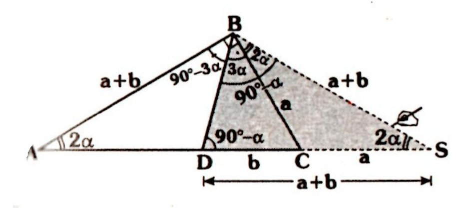
- Como FB=BC es equilátero $\Rightarrow FC = a$
- Luego el ΔFCD es isósceles
- En la parte sombreada:

$$x + x + \beta = 60° + \beta$$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 146



- Piden: $m\measuredangle BAC$
- Como:

$m\measuredangle BAC = 2\alpha$ y $m\measuredangle BDC = 90° - \alpha$

- De acuerdo a los criterios sobre trazos auxiliares: se prolonga $\overline{AC}$ y se traza $\overline{BS}$ tal que: $m\measuredangle BSA = 2\alpha \Rightarrow \Delta ABS$ y ΔDBS son isósceles

$\Rightarrow AB = BS = DS = a + b$

- Como $CD = b \Rightarrow CS = a$

$\Rightarrow \Delta BCS$ es isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle CBS = m\measuredangle BSC = 2\alpha$

- En ΔABS :

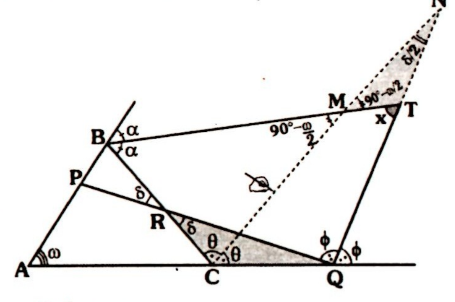
$$2\alpha + 2\alpha + 2\alpha + 90° = 180°$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 30°$$

$$\therefore \mathbf{m\measuredangle BAC = 30°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 147



- Piden: x
- Dato: $\omega - \delta = 20°$
- Se traza $\overline{CN}$ bisectriz del $\measuredangle RCQ$, por ángulo entre bisectrices en los triángulos RCQ y ABC:

$m\measuredangle CNQ = \dfrac{\delta}{2}$

$m\measuredangle BMC = 90° - \dfrac{\omega}{2}$

- En ΔMNT :

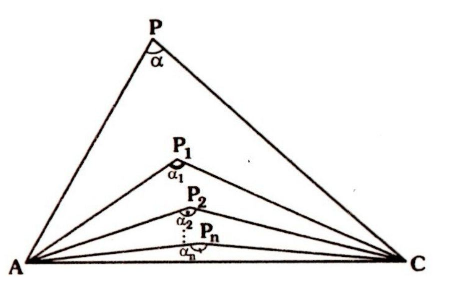
$x = 90° - \dfrac{\omega}{2} + \dfrac{\delta}{2}$

$\Rightarrow x = 90° - \dfrac{(\omega - \delta)}{2}$

$\therefore \mathbf{x = 80°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 148



- Nos piden: α_n
- Usando el teorema 25:

- En ΔAPC: $\alpha_1 = 90° + \frac{1}{2}\alpha$
- En ΔAP_1C: $\alpha_2 = 90° + \frac{1}{2}\alpha_1$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 90° + \frac{1}{2}\left(90° + \frac{1}{2}\alpha\right)$$

- En ΔAP_2C: $\alpha_3 = 90° + \frac{1}{2}\alpha_2$

$$\Rightarrow \alpha_3 = 90° + \frac{1}{2}\left[90° + \frac{1}{2}\left(90° + \frac{1}{2}\alpha\right)\right]$$

- En $\Delta AP_{n-1}C$:

$$\alpha_n = 90° + \frac{1}{2}\left\{90° + \dots \frac{1}{2}\left(90° + \frac{1}{2}\alpha\right)\dots\right\}$$

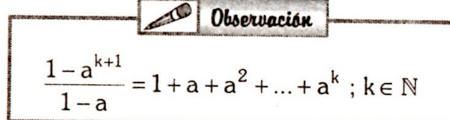
- Analizando por partes:

$$\alpha_n = \underbrace{90° + \frac{1}{2}90° + \frac{1}{2^2}90° + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}90°}_{E} + \frac{1}{2^n}\alpha$$

- Hallemos E, así:

$$E = 90° + \frac{1}{2}90° + \frac{1}{2^2}90° + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}90°$$

$$E = 90°\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$



Observación

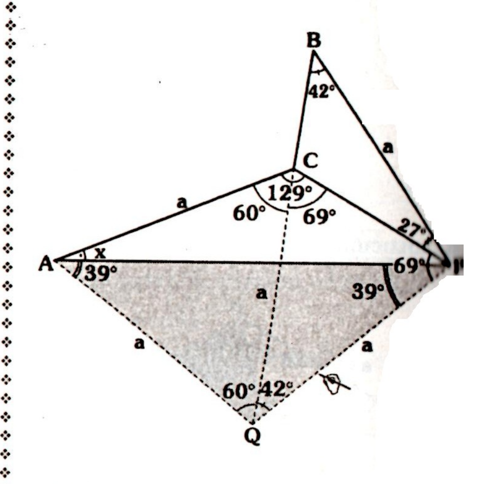
$$\frac{1-a^{k+1}}{1-a} = 1 + a + a^2 + \dots + a^k \;;\; k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow E = 90°\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right] \Rightarrow E = 180°\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\alpha_n = 180°\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + \frac{1}{2^n}\alpha}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 149



- Piden: x
- Dato: AC = BP
- Se prolonga $\overline{BC}$ (con ello se tendrá $m\measuredangle PBC = 42°$ y $m\measuredangle PCQ = 69°$, las medidas corresponden al tercer criterio de trazos auxiliares).
- Se traza $\overline{PQ}$ tal que $m\measuredangle PQB = 42°$

$\Rightarrow \Delta BPQ$ y ΔBCQ son isósceles

$\Rightarrow PQ = QC = PB = a$

- Como $m\measuredangle ACQ = 60°$ y

$AC = CQ \Rightarrow \Delta QCA$ es equilátero

$AQ = QP = a \Rightarrow \Delta AQP$ es isósceles

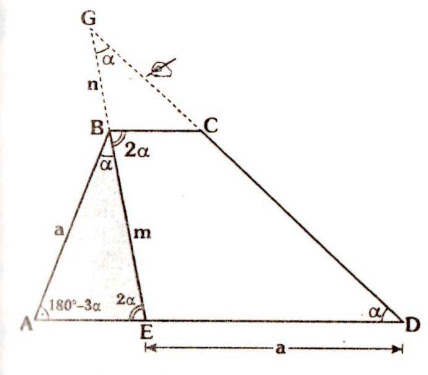
$\Rightarrow m\measuredangle QAP = m\measuredangle QPA = 39°$

$\Rightarrow x + 39° = 60°$

$\therefore$ **x = 21°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 150



- Nos piden el menor valor entero de α
- Las prolongaciones de $\overline{EB}$ y $\overline{DC}$ se cortan en G.
- Como $m\measuredangle AEB = 2\alpha$ y

$m\measuredangle EDG = \alpha \Rightarrow m\measuredangle EGD = \alpha$

$\Rightarrow \Delta EGD$ es isósceles $\Rightarrow m + n = a$

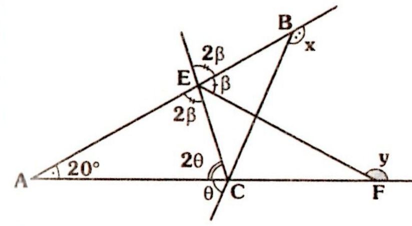
- Se puede asegurar : a>m
- En ΔABE, por teorema de la correspondencia:
- Como $a > m \Rightarrow 2\alpha > 180° - 3\alpha$

$\Rightarrow \alpha > 36°$

$\therefore\ \alpha_{(\text{menor entero})} = \mathbf{37°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 151



Nos piden: x + y

Por teorema 7:

ΔABC: $x + \theta = 180° + 20°$ ... (I)

ΔAEF: $y + \beta = 180° + 20°$ ... (II)

- De (I) y (II):

$x + y + \theta + \beta = 400°$ ... (III)

- En ΔAEC: $2\theta + 2\beta + 20° = 180°$

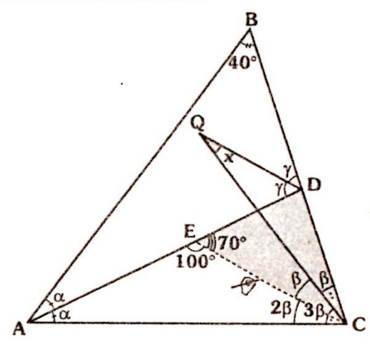
$\Rightarrow \theta + \beta = 80°$

- En (III): $x + y + 80° = 400°$

$\therefore$ **x + y = 320°**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 152



- Piden: x
- Se traza $\overline{CE}$ tal que $m\measuredangle ECQ = \beta$

$\Rightarrow m\measuredangle ECA = 2\beta$, con ello se tendrá que $\overline{CE}$ es bisectriz del ángulo ACB.

- Por ángulo entre bisectrices, en:

ΔABC, por teorema 25:

$$m\measuredangle AEC = 90° + \frac{40°}{2} = 110°$$

$\Rightarrow m\measuredangle CED = 70°$

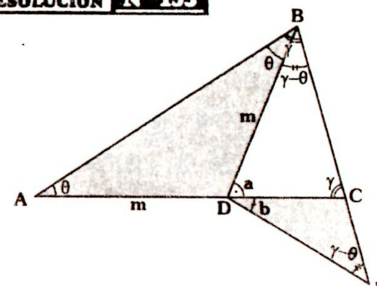
ΔDEC: por teorema 27:

$$x = \frac{70°}{2}$$

$\therefore$ **x = 35°**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 153



- Piden: $\frac{a}{b}$
- Dato: AD = DB = DE

$\Rightarrow \triangle ABD$ y $\triangle DCE$ son isósceles

- Por ángulo exterior, en:

$\triangle ABD: a = \theta + \theta \Rightarrow a = 2\theta$

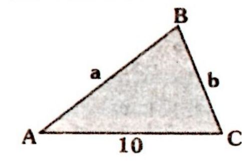
$\triangle DCE: b + \gamma - \theta = \gamma \Rightarrow b = \theta$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2\theta}{\theta}$

$\therefore \frac{a}{b} = 2$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 154



- Piden el menor valor entero del perímetro:

$\text{Perím}_{\triangle ABC} = 10 + a + b$

- Por existencia:

$a + b > 10$

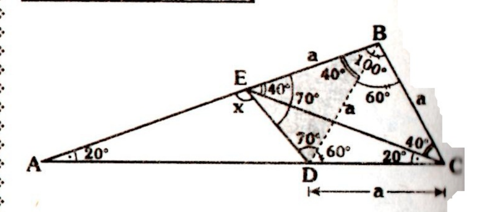
$\Rightarrow \underbrace{a + b + 10}_{\text{perím}(\triangle ABC)} > 10 + 10$

$\Rightarrow \text{Perím}_{(\triangle ABC)} > 20$

- Por lo tanto el menor valor entero de perímetro es **21**.

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 155



- Piden: x

$\triangle AEC$: isósceles $\Rightarrow m\measuredangle EAC = m\measuredangle ECA = 20°$

$\triangle EBC$: isósceles $\Rightarrow EB = BC = a$

- Se tiene :

$BC = CD = a$ y $m\measuredangle BCD = 60°$

$\Rightarrow \triangle DBC$ es equilátero

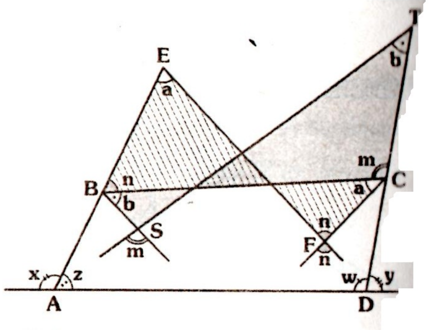
$\Rightarrow DB = a \Rightarrow \triangle EBD$ isósceles

- Luego: $m\measuredangle BED = m\measuredangle EDB = 70°$

$\therefore$ **x = 110°**

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 156

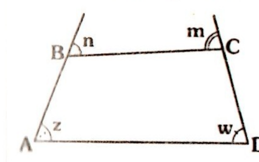


- Piden: m+n
- Dato: x + y = 220°

- En ⋈BSTC y ⋈BECF, por teorema 5, se tendrá:

$m\measuredangle EBC = n$ y $m\measuredangle \quad = m$

- Como: $x + y = 220° \Rightarrow z + \omega = 140°$



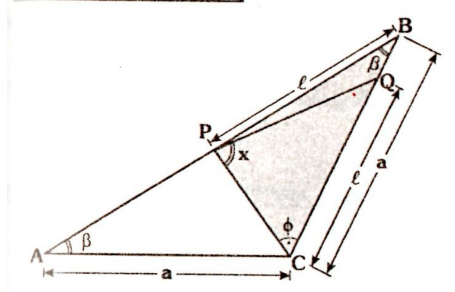
Del gráfico:

$m + n = z + \omega$

$\therefore$ **m + n = 140°**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 157



- Nos pide el menor valor entero de x
- Como $CQ = PB \Rightarrow a > \ell$
- En $\triangle PCB$, por teorema de la correspondencia:

$x > \phi \quad ...\text{(I)}$

- En $\triangle APC$: $\quad x > \beta \quad ...\text{(II)}$
- Sumando (I) y (II):

$2x > \beta + \phi$

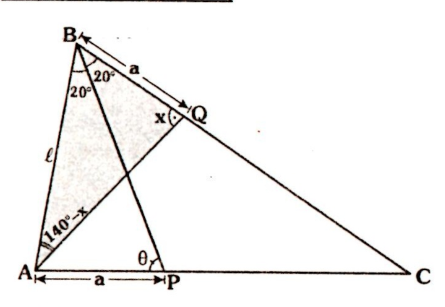
$\Rightarrow x + 2x > \underbrace{\beta + \phi + x}_{180°}$

$\Rightarrow x > 60°$

$\therefore x_{(\text{menor entero})} = 61°$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 158



- Piden el menor valor entero de x
- En $\triangle PBC$: $\theta > 20°$
- En $\triangle ABP$: como $\theta > 20° \Rightarrow \ell > a$
- En $\triangle ABQ$:

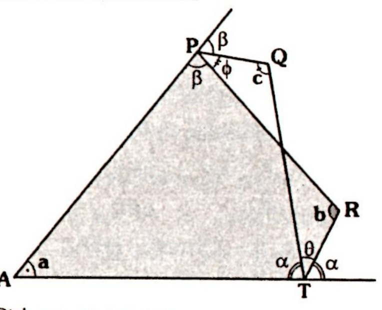
$\ell > a \Rightarrow x > 140° - x$

$\Rightarrow x > 70°$

$\therefore x_{(\text{menor entero})} = 71°$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 159



- Piden: m + n + p
- Dato: ma + nb + pc = 360°
- En ⌂APRT y ⌂APQT, por teorema 8:

$a + b = \alpha + \beta + \phi$

$a + c = \alpha + \theta + \beta$

$$\Rightarrow\ 2a+b+c=\underbrace{(2\alpha+\theta)}_{180^\circ}+\underbrace{(2\beta+\phi)}_{180^\circ}$$

$$\Rightarrow\ 2a+b+c=360^\circ$$

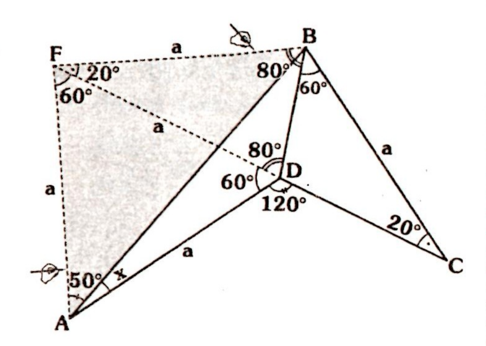
- Del dato: $ma+nb+pc=2a+b+c$

$$\Rightarrow m=2\ ;\ n=1\ \text{y}\ \ p=1$$

$$\therefore\ \mathbf{m+n+p=4}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 160



- Nos piden: x
- Se prolonga $\overline{CD}$ y se traza $\overline{BF}$ tal que $m\measuredangle BFC=20^\circ \Rightarrow \Delta BFC$ y ΔBFD : isósceles $\Rightarrow FB=FD=BC=a$
- $FD=DA=a$ y $m\measuredangle FDA=60^\circ \Rightarrow \Delta AFD$ es equilátero $\Rightarrow$ $AF=a$ y se tendrá $AF=FB$ y $m\measuredangle AFB=80^\circ$

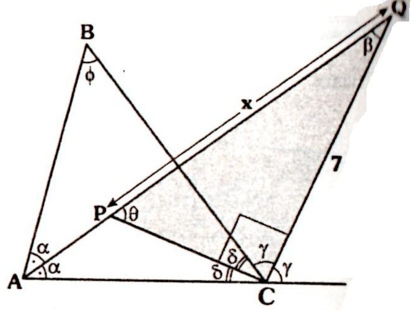
$$\Rightarrow\ m\measuredangle FAB=m\measuredangle FBA=50^\circ$$

$$\Rightarrow\ x+50^\circ=60^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x=10^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 161



- Piden: x
- Datos: "a" toma su mayor valor entero y el ΔABC es acutángulo.
- Por ángulo entre bisectrices (*teorema 27*)

$$\beta=\frac{\phi}{2}$$

- Como ΔABC es acutángulo $\Rightarrow \phi<90^\circ$

$$\Rightarrow\ \beta<45^\circ$$

- En el ◺PCQ se tendrá: $\theta+\beta=90^\circ$

$$\Rightarrow \theta>45^\circ \Rightarrow \theta>\beta$$

- Por teorema de la correspondencia

$$7>a\Rightarrow a=6\ \ (\textit{del dato})$$

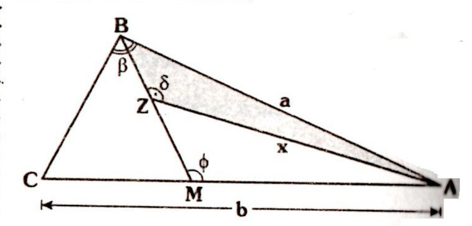
- En ◺PCQ:

$$x^2=7^2+6^2$$

$$\therefore\ \mathbf{x=\sqrt{85}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 162



- Piden el mayor valor entero de x.
- Dato: $a+b=10$

$$\beta>90^\circ\ \ \text{y}\ \ \phi>90^\circ$$

- En ΔMZA : $\quad \delta>\phi\Rightarrow\delta>90^\circ$
- En ΔBZA :

como $\quad \delta>90^\circ\Rightarrow a>x \qquad \ldots\text{(I)}$

- En ΔABC : $\ \beta>90^\circ\Rightarrow b>a$

$$\Rightarrow\ \underbrace{a+b}_{10}>a+a$$

$$5>a \qquad \ldots\text{(II)}$$

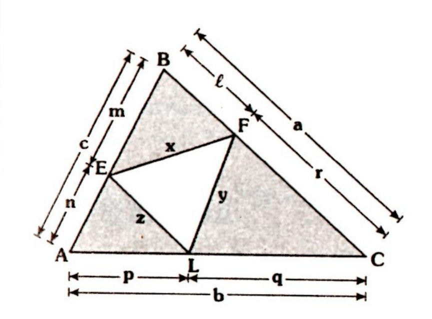
De (I) y (II): $\quad x<a<5$

$$\Rightarrow\ x<5$$

$$\therefore\ \mathbf{x_{(mayor\ entero)}=4}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 163



- Piden el mayor valor del $\text{Perím}_{(\blacktriangle EFL)}$
- Dato: $\quad \text{Perím}_{(\blacktriangle ABC)}=k\ ,\ \ k\in\mathbb{Z}^+$

$$\Rightarrow\ a+b+c=k$$

- *Por teorema de existencia en:*

$\Delta EBF: x<m+\ell\ ;\quad \Delta FCL: y<r+q$

$\Delta AEL: z<p+n$

$$\Rightarrow x+y+z<\underbrace{(m+n)}_{c}+\underbrace{(\ell+r)}_{a}+\underbrace{(p+q)}_{b}$$

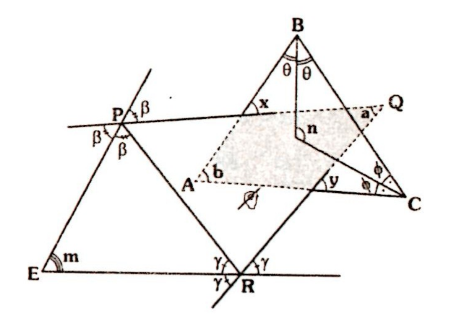
$$\Rightarrow x+y+z<a+b+c$$

$$\Rightarrow\ \text{Perím}_{(\blacktriangle EFL)}<k$$

- *Como k es entero, entonces el mayor valor entero del perímetro de* $\blacktriangle EFL$ *es:* $\mathbf{k-1}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 164



- Piden: $\quad x+y$
- Dato: $\quad n-m=60^\circ$
- En la región sombreada: $x+y=a+b$
- Por ángulo entre bisectrices, en:

$$\Delta PQR:\ \ m=90^\circ-\frac{a}{2} \qquad \ldots\text{(I)}$$

$$\Delta ABC:\ \ n=90^\circ+\frac{b}{2} \qquad \ldots\text{(II)}$$

- Restando (II) y (I):

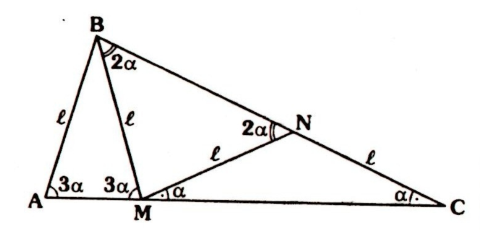
$$\underbrace{n-m}_{60^\circ}=\frac{b+a}{2}$$

$$\Rightarrow\ a+b=120^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x+y=120^\circ}$$

Clave C

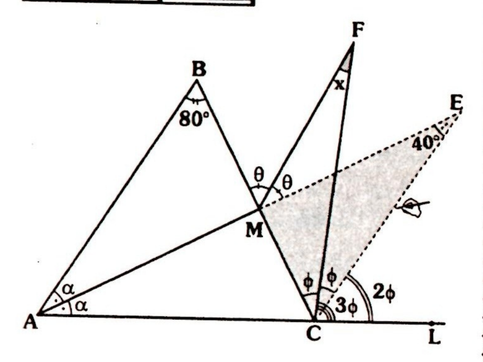
RESOLUCIÓN Nº 165



- Piden: m∢BAC
- Dato: α es máximo entero.
  ΔABM, ΔBNM y ΔMNC son isósceles.
- En ΔABM, del teorema 17:
  $3\alpha < 90° \Rightarrow \alpha < 30°$
- Como "α" es máximo y entero $\Rightarrow \alpha = 29°$.
- Luego: m∢BAC = 3α
  ∴ **m∢BAC = 87°**

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 166



- Piden: x
- Prolongamos $\overline{AM}$ y trazamos $\overline{CE}$ tal que m∢FCE = ϕ ⇒ m∢ECL = 2ϕ
- Por ángulo entre bisectrices (teorema 27) en:

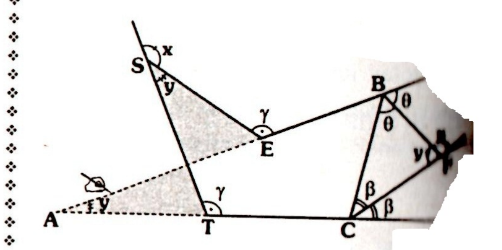
  ΔABC : $m∢AEC = \frac{80°}{2} = 40$

  ΔMEC : $x = \frac{40°}{2}$

  ∴ **x = 20°**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 167



- Piden: x
- Se tiene: x + y = 180° ... (I)
  ⇒ m∢BFC = m∢EST = y
- En la parte sombreada: m∢EAT = y
- En ΔABC por teorema 26 (ángulo entre bisectrices)

  $y = 90° - \frac{y}{2} \Rightarrow y = 60°$

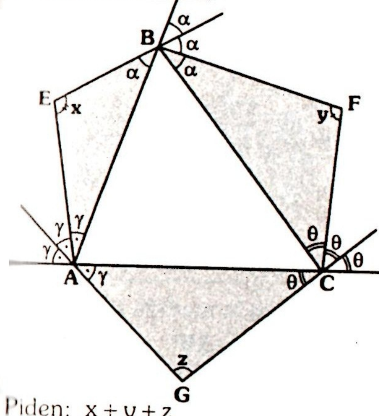
- En (I):

  $x + 60° = 180°$

  ∴ **x = 120°**

Clave


RESOLUCIÓN Nº 168



- Piden: x + y + z
- En ΔAEB, ΔBFC y ΔACG :

  $x + \alpha + \gamma = 180°$

  $y + \theta + \alpha = 180°$

  $z + \theta + \gamma = 180°$

  $\Rightarrow x + y + z + 2(\theta + \gamma + \alpha) = 540°$ ... (I)

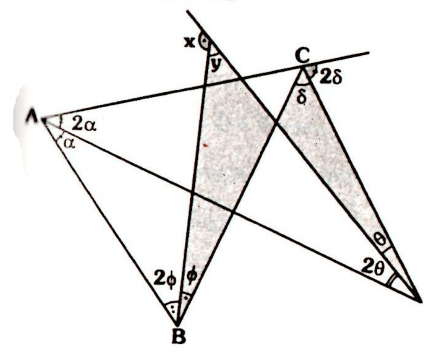
- En ΔABC, por teorema 3:
  $3\gamma + 3\theta + 3\alpha = 360° \Rightarrow \gamma + \theta + \alpha = 120°$
- En (I):

  $x + y + z + 2(120°) = 540°$

  ∴ **x + y + z = 300°**

Clave A

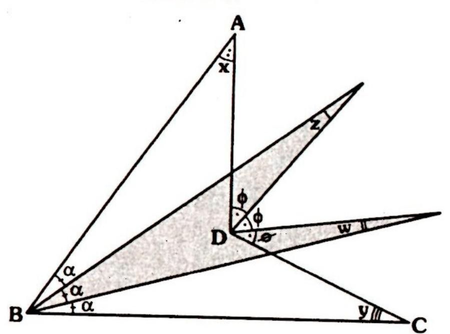
RESOLUCIÓN Nº 169



- No piden: x
- Dato: θ + α = 25°
- Del gráfico: x − y = 180°
- En ΔABC, por ángulo exterior:
  $3\delta = 3\alpha + 3\phi \Rightarrow \delta = \alpha + \phi$ ... (I)
- En la parte sombreada (⋈):
  $y + \phi = \delta + \theta$
- De (I): $y + \phi = \alpha + \phi + \theta$
  $\Rightarrow y = \alpha + \theta \Rightarrow y = 25°$
  ∴ **x = 155°**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 170



- Piden: $\frac{x + y}{z + w}$
- En la parte sombreada:
  $z + \omega + \alpha = \phi \Rightarrow z + \omega = \phi - \alpha$
- En ∢ABCD: $x + y + 3\alpha = 3\phi$

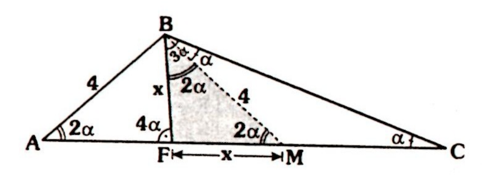
  $\Rightarrow x + y = 3(\phi - \alpha)$

  $\Rightarrow \frac{x + y}{z - \omega} = \frac{3(\phi - \alpha)}{\phi - \alpha}$

  ∴ $\mathbf{\frac{x + y}{z + \omega} = 3}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 171



- Piden el valor entero de x.
- En ΔABF:

$$m\measuredangle BAF < m\measuredangle AFB \Rightarrow x < 4 \quad \ldots(I)$$

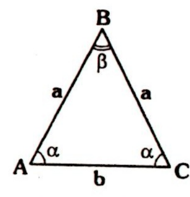
- Se traza $\overline{BM}$ tal que $m\measuredangle MBC = \alpha$
  $\Rightarrow \Delta MBC$, ΔFBM y ΔABM isósceles
  $\Rightarrow BM = 4$ y $FM = x$
- En ΔFBM:

$$4 < x + x \Rightarrow 2 < x \quad \ldots (II)$$

- De (I) y (II): $2 < x < 4$
- Por lo tanto el valor entero de x es **3**.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 172



- Nos piden la medida del mayor valor entero del menor ángulo interior.
- Dato: $Perím_{(\Delta ABC)} > 3b$
- Averiguemos ahora quien es el menor ángulo interior.
- Del dato: $2a + b > 3b \Rightarrow a > b$
- Por teorema de la correspondencia:

$$\alpha > \beta$$

- Es decir nos piden β, tal que sea mayor entero.
- Como: $\alpha > \beta \Rightarrow 2\alpha > 2\beta$

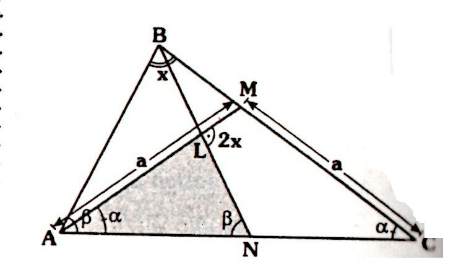
$$\Rightarrow \underbrace{2\alpha + \beta}_{180^\circ} > 2\beta + \beta$$

$$\Rightarrow 60^\circ > \beta$$

- Por lo tanto la medida del mayor valor entero de β es **59°**.

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 173



- Nos piden: x
- Dato: $AB = BN$ y $AM = MC$
  ΔABM y ΔAMC : isósceles
  $\Rightarrow m\measuredangle BAN = m\measuredangle ANB = \beta$
  $m\measuredangle MAC = m\measuredangle ACM = \alpha$
- En ΔABC:

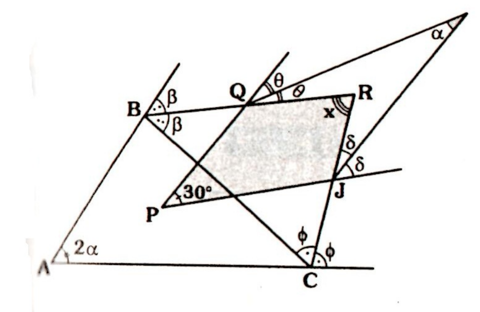
$$x + \alpha + \beta = 180^\circ \quad \ldots (I)$$

- En ΔALN: $\alpha + \beta = 2x$
- En (I): $x + 2x = 180^\circ$

$$\therefore \mathbf{x = 60^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 174



- En ΔABC, por ángulo entre bisectrices (teorema 26):

$$x = 90^\circ - \frac{(2\alpha)}{2} \Rightarrow x + \alpha = 90^\circ \quad \ldots (I)$$

- En la región sombreada, por teorema 31:

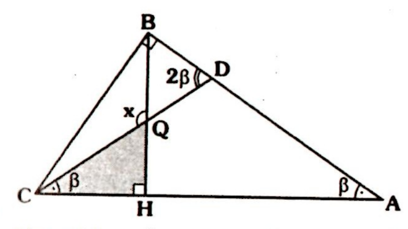
$$\alpha = \frac{x - 30^\circ}{2} \quad \ldots (II)$$

$$x + \frac{x - 30^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\therefore \mathbf{x = 70^\circ}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 175



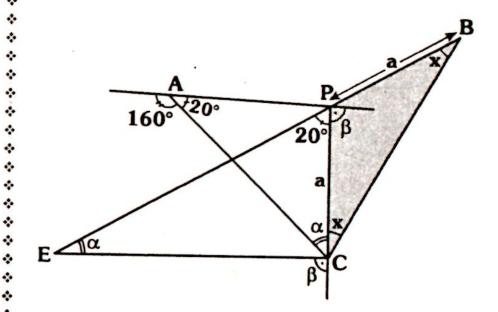
- Nos piden el mayor valor entero de x.
- Por dato: $AD = CD$
  $\Rightarrow \Delta CDA$: isósceles
  $\Rightarrow m\measuredangle DCA = m\measuredangle DAC = \beta$
- En $\triangle DBC$: $2\beta < 90^\circ \Rightarrow \beta < 45^\circ \quad \ldots (I)$
- En $\triangle CHQ$: $x = 90^\circ + \beta$
- De (I): $\beta < 45 \Rightarrow \underbrace{90^\circ + \beta}_{x} < 45^\circ + 90^\circ$

$$\Rightarrow x < 135^\circ$$

- Por lo tanto el mayor valor entero de x es **134°**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 176



- Piden: x
- Por dato:

$$PB = PC \Rightarrow m\measuredangle PCB = x$$

- En ΔPAC: $\beta = \alpha + 20^\circ$
- En ΔEPC: $m\measuredangle CPE + \alpha = \beta$

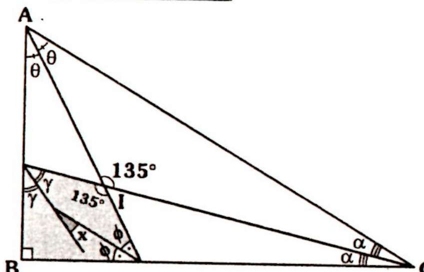
$$\Rightarrow m\measuredangle CPE = 20^\circ$$

- En ΔCBP: $x + x = 20^\circ$

$$\therefore \mathbf{x = 10^\circ}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 177



- Piden: x
- En ◺ABC, por ángulo entre bisectrices (*teorema 25*)

$$m\measuredangle AIC = 90° + \frac{90°}{2} = 135°$$

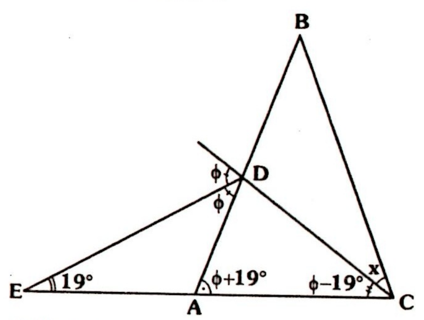
- En la región sombreada, por teorema 32.

$$x = \frac{135° - 90°}{2}$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{45°}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 178



- Piden: x
- Dato: AB=BC
- Por ángulo exterior en:

$\triangle EDA : m\measuredangle DAC = \phi + 19°$

$\triangle EDC : m\measuredangle DCE = \phi - 19°$

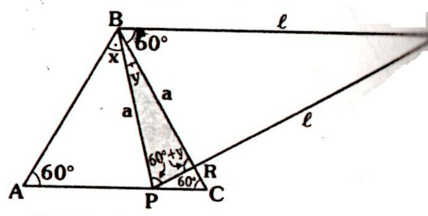
- Como $AB = BC \Rightarrow m\measuredangle ACB = m\measuredangle BAC$

$$x + \not\phi - 19° = \not\phi + 19°$$

$$\therefore \mathbf{x = 38°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 179



- Piden: x
- Dato: PB=BR; BQ=PC y $\overline{BQ} // \overline{PC}$

$\triangle ABC$: equilátero $\Rightarrow x + y = 60°$

- Por ángulos alternos: $m\measuredangle CBQ = 60°$

$\triangle PBQ$ y $\triangle PBR$: isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle QBP = m\measuredangle BPQ = m\measuredangle PRB = 60° + y$

- En $\triangle PBR$:

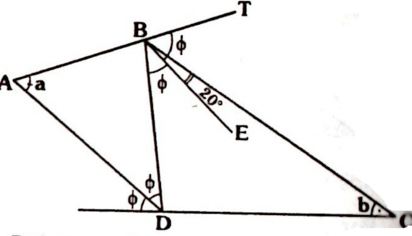
$$60° + y + 60° + y + y = 180°$$

$$\Rightarrow y = 20°$$

$$\therefore \mathbf{x = 40°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 180



- Piden: a – b
- Dato: $\overline{BE} // \overline{AD}$ y $m\measuredangle EBT = m\measuredangle EBD$

- Por ángulos alternos internos:

$$m\measuredangle EBD = \phi$$

- Por ángulos correspondientes:

$$a = \phi$$

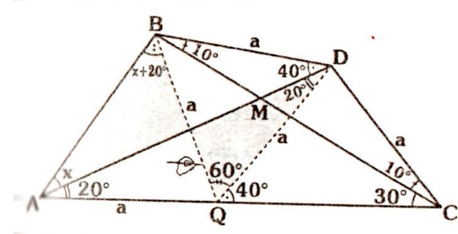
- En $\triangle DBC$, por ángulo exterior

$$2a = a + 20° + b$$

$$\therefore \mathbf{a - b = 20}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 181



- Piden: x
- Como $m\measuredangle DCA = 2(m\measuredangle DAC)$ se traza $\overline{DQ}$ tal que $m\measuredangle ADQ = 20° \Rightarrow \triangle ADQ$ y $\triangle QDC$ son isósceles:

$$\Rightarrow AQ = QD = DC = a$$

- Se tiene entonces: $m\measuredangle QDB = 60°$ y $DQ = DB \Rightarrow \triangle DQB$ es equilátero

$\Rightarrow QB = QA \Rightarrow m\measuredangle QAB = m\measuredangle ABQ = x + 20°$

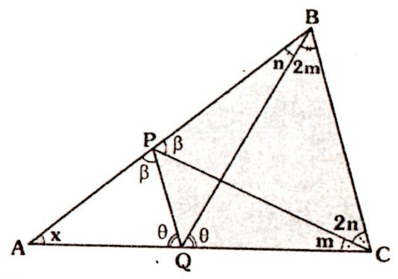
- En la parte sombreada (◺):

$$x + x + 20° = 60° + 20°$$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 182



- Piden: x
- En $\triangle ABC$:

$$x + 3(m + n) = 180° \quad \ldots (a)$$

- En ◿CQPB, por teorema 8:

$$\beta + \theta = 3(m + n) \quad \ldots (I)$$

- En $\triangle QBC$ y $\triangle PBC$:

  - $\theta + 3m + 2n = 180°$
  - $\beta + 2m + 3n = 180°$

$$\Rightarrow \underbrace{\theta + \beta}_{3(m+n)} + 5(m + n) = 360°$$

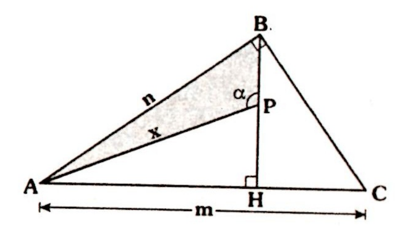
$$\Rightarrow m + n = 45°$$

- En (a): $x + 3(45°) = 180°$

$$\therefore \mathbf{x = 45°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 183



- Piden el mayor valor entero de x
- Dato: $m+n=10$
- En ◺ AHP : $\alpha > 90° \Rightarrow n > x$ ... (I)
- En ◺ABC: $n < m \Rightarrow 2n < \underbrace{n+m}_{10}$

$\Rightarrow n < 5$ ... (II)

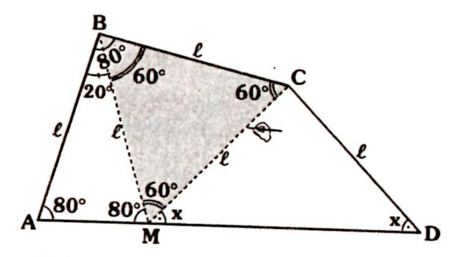
- De (I) y (II): $x < n$ y $n < 5$

$\Rightarrow x < 5$

- El mayor valor entero de x es **4**

Clave A

Resolución Nº 184



- Piden: x
- Datos: $AB = BC = CD$
- Se traza $\overline{BM}$ tal que $m\measuredangle ABM = 20°$

$\Rightarrow \Delta ABM$: isósceles $\Rightarrow MB = \ell$

- Como $MB = BC$ y $m\measuredangle MBC = 60°$, al trazar $\overline{MC}$ se tendrá que el: ΔMBC es equilátero

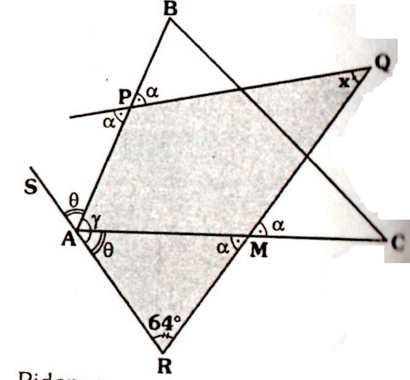
ΔMCD es isósceles $\Rightarrow m\measuredangle CMD = x$

$\Rightarrow x + 140° = 180°$

$\therefore$ **x = 40°**

Clave E

Resolución Nº 185



- Piden: x
- Dato: $\theta + \gamma = 180°$
- Al prolongar $\overline{RA}$, se tendrá:

$m\measuredangle BAS = \theta$

- En ΔAMR: $\alpha + \theta + 64° = 180°$

$\Rightarrow \alpha + \theta = 116°$

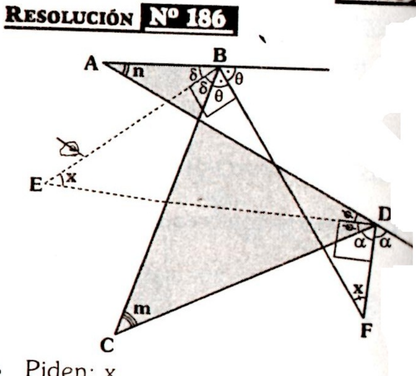
- En ⏢QRAP, por teorema 8:

$x + 64° = \underbrace{\alpha + \theta}_{116°}$

$\therefore$ **x = 52°**

Clave C

Resolución Nº 186



- Piden: x
- Dato: $m + n = 60°$

- Se trazan las bisectrices de los ángulos ABC y ADC.

$\Rightarrow m\measuredangle EBF = m\measuredangle EDF = 90°$

$\Rightarrow m\measuredangle BED = x$

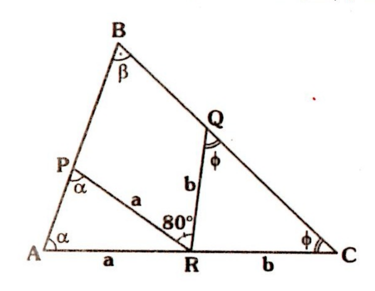
- Por teorema 28: $x = \dfrac{m+n}{2}$

$\therefore$ **x = 30°**

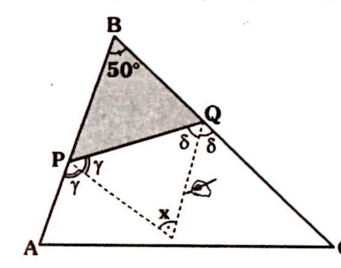
Clave B

Resolución Nº 187

Analicemos este problema por partes:



- ΔABC: $\alpha + \phi + \beta = 180°$ ... (I)
- En ⏢RPBQ: $\alpha + \phi = \beta + 80°$
- En (I): $\beta + 80 + \beta = 180° \Rightarrow \beta = 50°$



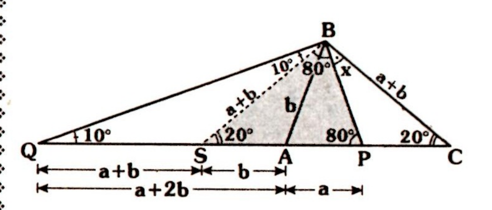
- Piden: x
- Por ángulo entre bisectrices:

$x = 90° - \dfrac{50°}{2}$

$\therefore$ **x = 65°**

Clave D

Resolución Nº 188



- Piden: x
- Se traza $\overline{BS}$ tal que $m\measuredangle QBS = 10°$

$\Rightarrow \Delta QSB$ y ΔSBS : isósceles

$\Rightarrow QS = SB = BC = a + b$

- Como:

$QA = a + 2b \Rightarrow SA = b \Rightarrow SP = a + b$

$\Rightarrow \Delta SPB$: isósceles

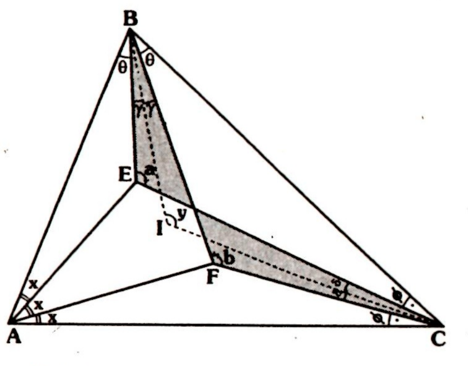
$\Rightarrow m\measuredangle SBP = m\measuredangle SPB = 80°$

- En ΔBPC: $x + 20° = 80°$

$\therefore$ **x = 60°**

Clave C

Resolución Nº 189



- Piden: x
- Dato: $a + b = 210°$

- Se trazan las bisectrices de los ángulos $\overline{EBF}$ y $\overline{FCE}$, las cuales también son bisectrices de los ángulos ABC y ACB.
- Por teorema 28:

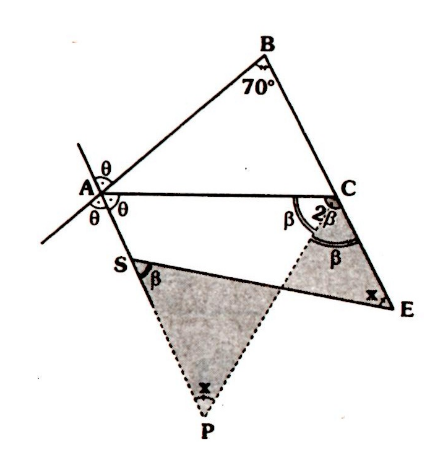
$$y=\frac{a+b}{2}\Rightarrow \mathbf{y=105^\circ}$$

- Por teorema 25:

$$y=90^\circ+\frac{3x}{2}\Rightarrow \mathbf{x=10^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 190



- Piden: x
- Se traza la bisectriz del $\measuredangle \overline{ACE}$, la cual corta a la prolongación de $\overline{AS}$ en P.
- En la parte sombreada:

$$m\measuredangle SPC = x$$

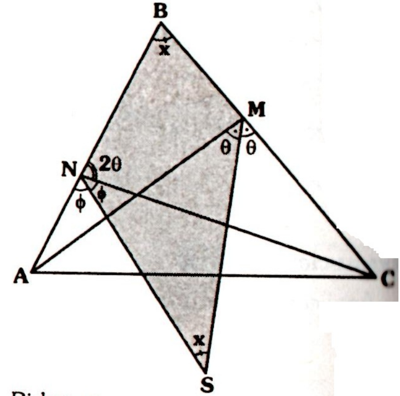
- En ΔABC, por ángulo entre bisectrices (*teorema* 26)

$$x=90^\circ-\frac{70^\circ}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=55^\circ}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 191



- Piden: x
- Dato: $m\measuredangle BNC = m\measuredangle AMC$
- $m\measuredangle BNC + m\measuredangle CNA = 180^\circ$

$$\Rightarrow 2\theta+2\phi=180^\circ \Rightarrow \theta+\phi=90^\circ$$

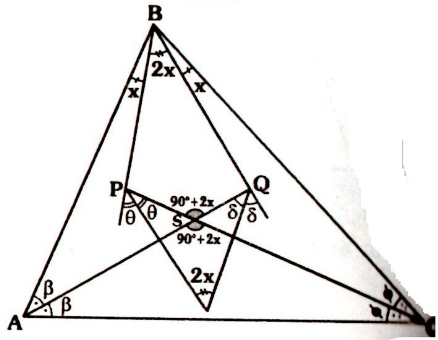
- En la región sombreada:

$$x+x=\underbrace{\theta+\phi}_{90^\circ}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=45^\circ}$$

Clave

RESOLUCIÓN Nº 192



- Piden: x

- En ΔABC, por teorema 25:

$$m\measuredangle ASC=90^\circ+\frac{(m\measuredangle ABC)}{2}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle ASC=90^\circ+2x$$

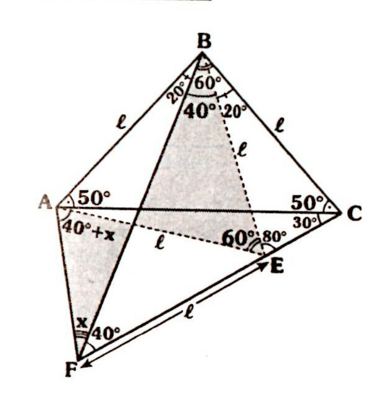
- En ⏢PBSQ, por teorema 31:

$$2x=\frac{(90^\circ+2x)-2x}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=\frac{45^\circ}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 193



Nos piden: x

Al completar "ángulos" nos damos cuenta:

$$m\measuredangle ACB=2(m\measuredangle BAC)$$

Se traza $\overline{BE}$, tal que $m\measuredangle CBE=20^\circ$

$\Rightarrow \Delta EBC$ y $\Rightarrow \Delta FEB$: isósceles

$\Rightarrow AE=EB=BC=\ell$

Como $AB=BE$ y $m\measuredangle ABE=60^\circ$

$\Rightarrow$ ΔBEA equilátero $\Rightarrow AE=\ell$

ΔAEF : isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle EAF=40^\circ+x$

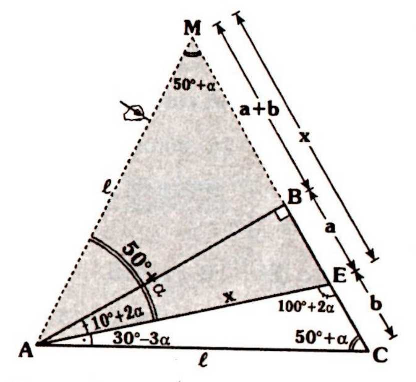
- En la parte sombreada:

$$x+40^\circ+x=60^\circ+40^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x=30^\circ}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 194



- Nos piden: x
- Completando ángulos, se tendrá:

$$m\measuredangle AEC=2(m\measuredangle ACE)$$

- Se prolonga $\overline{CB}$ y se traza $\overline{AM}$ tal que:

$$m\measuredangle AME=50^\circ+\alpha$$

$$\Rightarrow m\measuredangle EAM=50^\circ+\alpha$$

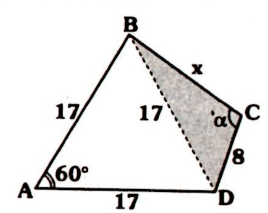
$\Rightarrow \Delta AMC$ y ΔAEM isósceles

$\Rightarrow MB=BC=a+b$ y $AE=EM$

$$\therefore\ \mathbf{x=2a+b}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 195



- Piden la cantidad de valores enteros de x.
- Dato: $\alpha > 90°$
- Como AB=AD y $m\sphericalangle BAD = 60°$

  $\Rightarrow \Delta BDA$ es equilátero $\Rightarrow BD = 17$
- En ΔBCD por existencia:

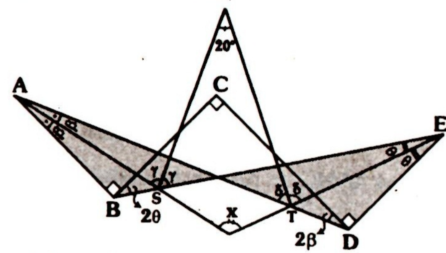
  $$17-8 < x < 17+8$$
  $$9 < x < 25 \quad \ldots (I)$$
- Por teorema 21, como $\alpha > 90°$

  $$17^2 > x^2 + 8^2$$
  $$\Rightarrow \quad 15 > x \quad \ldots (II)$$
- De (I) y (II): $9 < x < 15$
- Los valores enteros de x, son:

  {10;11;12;13;14}

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 196



- Nos piden: x
- Del gráfico: $\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\overline{BC} // \overline{DE}$

  $\Rightarrow m\sphericalangle CDA = 2\beta$ y $m\sphericalangle CBE = 2\theta$
- Por teorema 28:
  - En la parte sombreada:

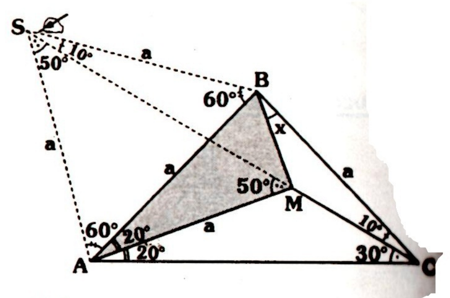
  $$x = \frac{(90° + 2\theta) + (90° + 2\beta)}{2}$$
  $$\Rightarrow x = 90° + \theta + \beta \quad \ldots (I)$$

- En ⋈ASET: $20° = \dfrac{\theta+\beta}{2} \Rightarrow \theta + \beta = 40°$
- En (I): $x = 90° + 40°$

  $\therefore$ **x = 130°**

Clave

RESOLUCIÓN Nº 197



- Piden: x
- Se prolonga $\overline{CM}$ y se traza $\overline{BS}$ tal que $m\sphericalangle BSC = 10° \Rightarrow BS = a$
- Como SB = BA y $m\sphericalangle SBA = 60°$

  $\Rightarrow \Delta BSA$ es equilátero $\Rightarrow AS = a$ y $m\sphericalangle ASM = 50°$

  ΔSAM : isósceles $\Rightarrow AM = a$
- Como $AB = AM \Rightarrow \Delta ABM$ es isósceles

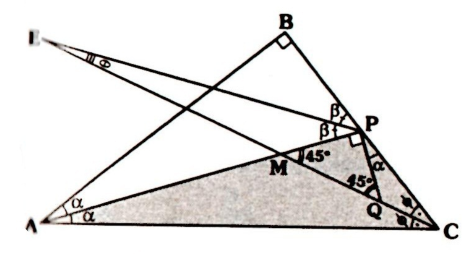
  $\Rightarrow m\sphericalangle AMB = m\sphericalangle ABM = 80°$

  $\Rightarrow m\sphericalangle BMS = 30°$
- En ΔBCM:

  $$x + 10° = 30°$$
  $\therefore$ **x = 20°**

Clave

RESOLUCIÓN Nº 198



- Piden: $\dfrac{\alpha}{\theta}$
- Dato: MP = PQ
- En ⊿ABP, por ángulo exterior:

  $$m\sphericalangle APQ + \alpha = 90° + \alpha$$
  $$\Rightarrow m\sphericalangle APQ = 90°$$

  ⊿MPQ: isósceles

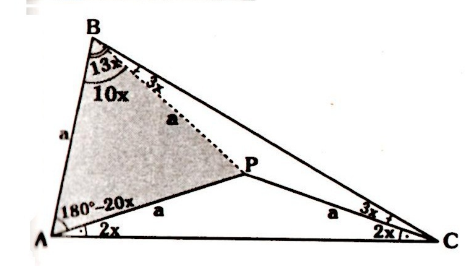
  $$\Rightarrow m\sphericalangle PMQ = m\sphericalangle MQP = 45°$$
- Sea $m\sphericalangle ACM = \phi \Rightarrow \alpha + \phi = 45°$

  $$\Rightarrow m\sphericalangle QCP = \phi$$
- En ΔAPC, por ángulo entre bisectrices (*teorema 27*):

  $$\theta = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{\theta} = 2$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 199



- Piden: $m\sphericalangle PAC$
- Como AB=AP y $m\sphericalangle BAP = 180° - 20x$

  $\Rightarrow m\sphericalangle ABP = m\sphericalangle APB = 10x$

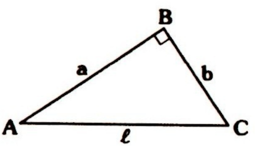
  $\Rightarrow m\sphericalangle PBC = 3x \Rightarrow \Delta PBC$ es isósceles $\Rightarrow PB = PC = a$
- ΔABP : equilátero $\Rightarrow 10x = 60°$

  $\Rightarrow x = 6°$

  $\therefore$ **m∡PAC = 12°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 200



- Piden la cantidad de valores enteros de ℓ.
- Dato: $a + b + \ell = 30$
- En ⊿ABC:

  $$\ell > a$$
  $$\ell > b$$
  $$\Rightarrow 2\ell > a + b$$
  $$\ell + 2\ell > \underbrace{a + b + \ell}_{30} \Rightarrow \ell > 10$$
- Por existencia:

  $$\ell < a + b$$
  $$\Rightarrow \ell + \ell < \underbrace{a + b + \ell}_{30} \Rightarrow \ell < 15$$
- Se tendrá entonces:

  $$10 < \ell < 15 \quad \ldots (I)$$
- Aún no podemos indicar la cantidad de valores, falta la restricción para que sea triángulo rectángulo:

  $$a^2 + b^2 = \ell^2$$

Considerando:

- Sean: $x, y \in \mathbb{R}^+$, se cumple:

  M.C. $\geq$ M.A.
- M.C.: media cuadrática
- M.A.: media aritmética

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$$

- Usando la observación para a y b:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{\ell^2}{2}} \geq \frac{(30-\ell)}{2}$$

- Resolviendo: $\ell \geq 30(\sqrt{2}-1)$

$$\ell \geq 12{,}426 \qquad \ldots \text{(II)}$$

- De (I) y (II):

$$12{,}426 \leq \ell < 15$$

- Los valores entero de ℓ son: {13;14}

Clave A

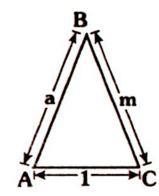
Nota

a y **b** *no son enteros necesariamente, la condición :* $a, b \in \mathbb{R}^+$.





RESOLUCIÓN Nº 201



- Nos piden la medida del menor ángulo exterior.
- Dato: a , $m \in \mathbb{Z}^+$ y β es la medida del mayor ángulo exterior.
- Analicemos:

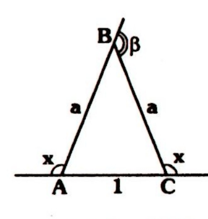
  Por existencia $|a-m| < 1 < a+m$

  Como a y m son enteros $\Rightarrow a = m$

  $\Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle ACB$
- Por dato existen medidas angulares mayor y menor $\Rightarrow a > 1$

  $\Rightarrow m\measuredangle BCA > m\measuredangle ABC$

  $\Rightarrow$ El mayor ángulo exterior es en "B".

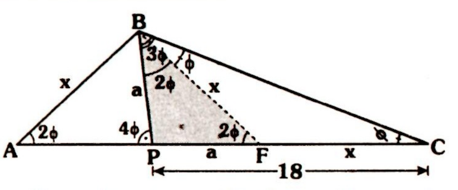


$$x + x + \beta = 360^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 180^\circ - \frac{\beta}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 202



- Nos piden la cantidad de valores enteros de x.
- Se traza $\overline{BF}$, tal que $m\measuredangle FBC = \phi$

$\Rightarrow \Delta FBC$, ΔPBF y ΔABF: isósceles

$\Rightarrow AB = BF = FC = x$ y $PB = PF = a$

- Del gráfico: $a + x = 18$
- En ΔABP: como $m\measuredangle APB > m\measuredangle BAP$

$$\Rightarrow x > a$$

$$\Rightarrow\ 2x > \underbrace{x+a}_{18}$$

$$x > 9 \qquad \ldots \text{(I)}$$

- En ΔBFP, por existencia:

$$x < 2a$$

$$\frac{x}{2} < a$$

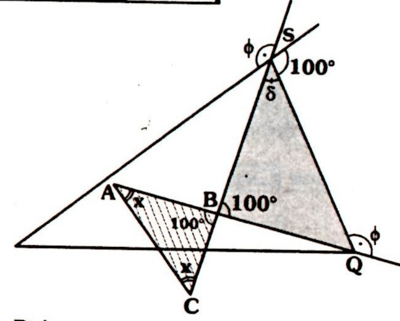
$$\Rightarrow x + \frac{x}{2} < \underbrace{a+x}_{18}$$

$$\Rightarrow\ x < 12 \qquad \ldots \text{(II)}$$

- De (I) y (II): $9 < x < 12$
- Los valores enteros de x, son: **{10;11}**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 203



- Piden: x
- Dato: $\triangle ABC$: isósceles
- Sea $m\measuredangle BSQ \Rightarrow m\measuredangle SBQ + \delta = \phi$

$\Rightarrow m\measuredangle SBQ = 100°$

- Como $\triangle ABC$ es isósceles y $m\measuredangle ABC = 100°$

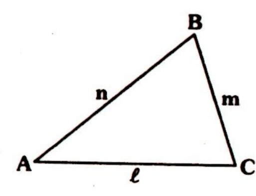
$\Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle BCA = x$

$\Rightarrow x + x + 100° = 180°$

$\therefore$ **x = 40°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 204



- Nos piden la cantidad de triángulos de longitudes enteras y perímetro 40.

$\Rightarrow m, n$ y $\ell \in \mathbb{Z}^+$

- Sea p el semiperímetro de $\blacktriangle ABC \Rightarrow p = 20$, por teorema de existencia:

$m < 20$; $n < 20$ y $\ell < 20$

- Sin pérdida de generalidad, consideremos:

$m \geq n \geq \ell$ ... (I)

- Como m, n, ℓ son enteros, analicemos de la siguiente forma:

- Para $m = 19$: $\Rightarrow n + \ell = 21$

n	ℓ
19	2
18	3
17	4
16	5
15	6
14	7
13	8
12	9
11	10

Si consideramos $n = 10 \Rightarrow \ell = 11$, ya no cumpliría (I), además el Δ ya se habría contado, se trataría del Δ de lados {19;11;10}

$\Rightarrow$ Cuando $m = 19 \Rightarrow$ tenemos 9 triángulos.

- Para $m = 18 \Rightarrow n + \ell = 22$

n	ℓ
18	4
17	5
16	6
15	7
14	8
13	9
12	10
11	11

$\Rightarrow$ se tienen 8 triángulos

- Para $m = 17 \Rightarrow n + \ell = 23$

n	ℓ
17	6
16	7
15	8
14	9
13	10
12	11

$\Rightarrow$ se tienen 6 triángulos

- Para $m = 16 \Rightarrow n + \ell = 24$

n	ℓ
16	8
15	9
14	10
13	11
12	12

$\Rightarrow$ se tienen 5 triángulos

- Para $m = 15 \Rightarrow n + \ell = 25$

n	ℓ
15	10
14	11
13	12

$\Rightarrow$ se tienen 3 triángulos

- Para $m = 14 \Rightarrow n + \ell = 26$

n	ℓ
14	12
13	13

$\Rightarrow$ se tienen 2 triángulos

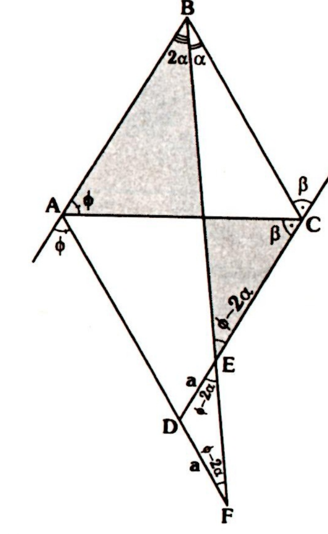
- Luego:

El total de triángulos es: 9+8+6+5+3+2

Por lo tanto, el total de triángulos es 33

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 205



- Piden el mayor valor entero de α
- Analicemos las restricciones para α
- En $\triangle ABC : 3\alpha < 180° \Rightarrow \alpha < 60°$ .... (I)
- En $\triangle EBC : \beta = \phi - \alpha$
- En la parte sombreada:

$$\phi + 2\alpha = \phi - 2\alpha + \underbrace{\beta}_{\phi-\alpha}$$

$\Rightarrow \phi = 5\alpha$

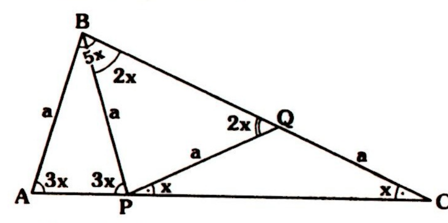
- En (A): $2\phi < 180°$

$\Rightarrow 2(5\alpha) < 180° \Rightarrow \alpha < 18°$ ... (II)

- De (I) y (II): nos quedamos con la última rectricción, por lo tanto el mayor valor de α es **17°**.

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 206

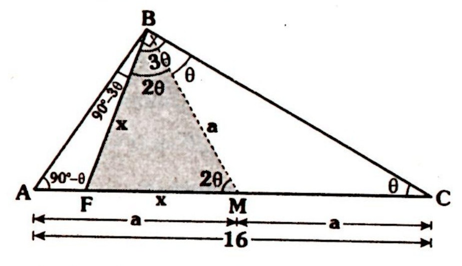


- Nos piden x
- De los datos ΔABP, ΔBQP y ΔPQC son triángulos isósceles.
- En ΔABC: $5x + 3x + x = 180°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 20°}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 207



- Piden el menor valor entero de x.
- Se traza $\overline{BM}$ tal que $m\sphericalangle CBM = \theta$

$\Rightarrow \Delta BCM$ y ΔABM: isósceles

$\Rightarrow BM = MC = AM = a$

$2a = 16 \Rightarrow a = 8$

ΔFBM: isósceles $\Rightarrow FB = FM = x$

Por existencia: $a < x + x$

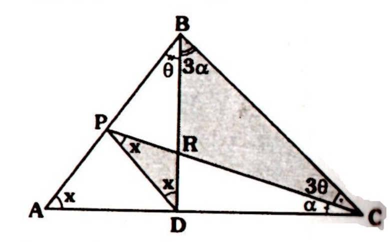
$\Rightarrow 8 < 2x$

$\Rightarrow 4 < x$

- Por lo tanto el menor valor entero de x es: **5.**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 208



- Nos piden: x
- En ΔABC: $x + 4(\alpha + \theta) = 180°$
- En la parte sombreada:

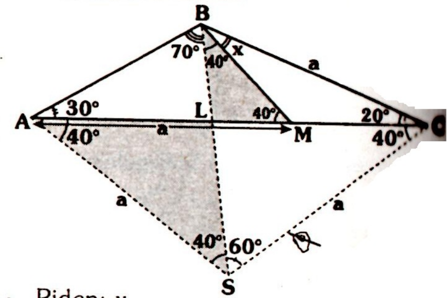
$$x + x = 3(\alpha + \theta) \Rightarrow \frac{2}{3}x = \alpha + \theta$$

- En (I): $x + 4\left(\frac{2}{3}x\right) = 180°$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{540°}{11}}$$

Clave

RESOLUCIÓN Nº 209



- Piden: x
- Se traza $\overline{CS}$ tal que $m\sphericalangle ACS = 40°$ $CS = a \Rightarrow \Delta BCS$ es equilátero
- Como SC=SB y $m\sphericalangle BSC = 2(m\sphericalangle BAC)$, de la observación indicada en el estudio del triángulo isósceles $\Rightarrow$ SA = a
- Luego el ΔASB es isósceles $\Rightarrow$ SB = a
- Como AM=SB y ΔALS es isósceles

(AL = LS)

$\Rightarrow LM = LB \Rightarrow \Delta LBM$ es isósceles

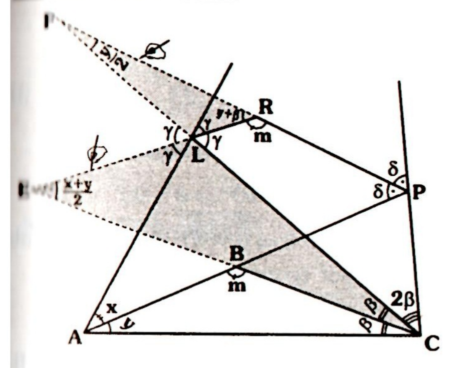
$\Rightarrow m\sphericalangle LBM = m\sphericalangle BML = 40°$

En ΔBMC: $x + 20° = 40°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 20°}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 210



- Piden: $\dfrac{x}{y}$
- En ΔAPC y ΔALC, por ángulo entre bisectrices (teorema 27):

$$m\sphericalangle LEC = \frac{m\sphericalangle LAC}{2} \Rightarrow m\sphericalangle LEC = \frac{x+y}{2}$$

$$m\sphericalangle PFC = \frac{m\sphericalangle PAC}{2} \Rightarrow m\sphericalangle PFC = \frac{y}{2}$$

- En ΔABC: $m + y + \beta = 180°$

$\Rightarrow m\sphericalangle ERF = y + \beta$

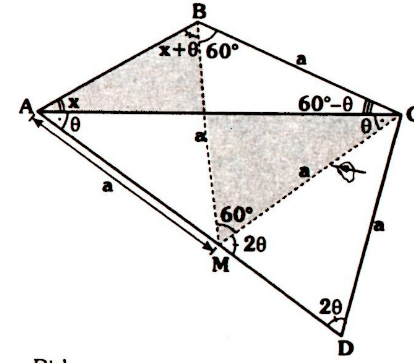
- En la parte sombreada ($\bowtie$):

$$\frac{x+y}{2} + \beta = \frac{y}{2} + y + \beta$$

$$\Rightarrow \mathbf{\frac{x}{y} = 2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 211



- Piden: x
- Se traza $\overline{CM}$ tal que $m\sphericalangle ACM = \theta \Rightarrow$ ΔACM y ΔMCD es isósceles.
- Como $m\sphericalangle ACM = 60°$ y $BC = CM \Rightarrow \Delta BMC$ es equilátero

$\Rightarrow MA = MB \Rightarrow m\sphericalangle ABM = x + \theta$

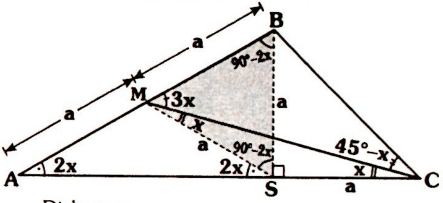
- En la parte sombreada ($\bowtie$):

$$x + x + \theta = 60° + \theta$$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 212



- Piden: x
- Se traza $\overline{MS}$ tal que $m\sphericalangle CMS = x$

$\Rightarrow \Delta AMB$ y ΔSMC: isósceles $\Rightarrow MS = SC = a$

- Como MB=MS y $m\sphericalangle SMB = 4x$

$m\sphericalangle MSB = m\sphericalangle MBS = 90° - 2x$

$\Rightarrow m\sphericalangle BSC = 90° \Rightarrow$ ◺BSC :

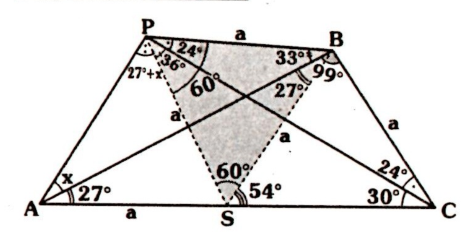
isósceles $\Rightarrow SC = BS = a$

$\Rightarrow \Delta MBS$: equilátero $\Rightarrow 4x = 60°$

$\therefore$ **x = 15°**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 213



- Piden: $m\sphericalangle APC$
- Al completar ángulos, verificamos:

$m\sphericalangle BCA = 2(m\sphericalangle BAC)$

- Luego se traza $\overline{BS}$ tal que:

$m\sphericalangle ABS = 27°$

$\Rightarrow \Delta ABS$ y $\Rightarrow \Delta SBC$ son isósceles

$\Rightarrow AS = SB = BC = a$

- También ΔPSB : equilátero

$\Rightarrow AS = SP \Rightarrow m\sphericalangle APS = 27° + x$

- En ΔAPS, por ángulo exterior:

$2x + 54° = 60° + 54°$

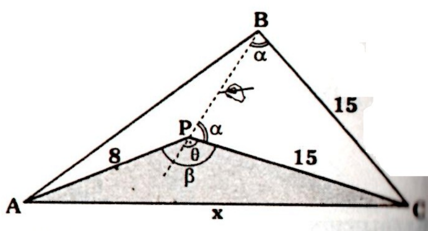
$\Rightarrow x = 30°$

- Como nos piden $m\sphericalangle APC : 27° + 30° + 36°$

$\therefore$ **$m\sphericalangle APC = 93°$**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 214



- Piden el menor valor entero de x.
- En ΔAPC, por existencia:

$7 < x < 23$ ... (I)

- También ΔBPC : isósceles

$\Rightarrow \alpha < 90° \Rightarrow \theta > 90°$

- Como $\beta > \theta \Rightarrow \beta > 90° \Rightarrow \Delta APC$ es obtuso, por teorema 21:

$x^2 > 8^2 + 15^2$

$\Rightarrow x > 17$ ... (II)

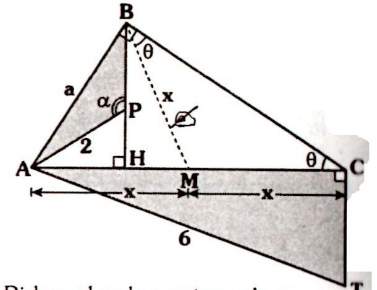
- De (I) y (II):

$17 < x < 23$

- Por lo tanto el menor valor entero de x es 18.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 215



- Piden el valor entero de x.

- Si trazamos $\overline{BM}$ tal que $m\sphericalangle CBM = \beta$, se verifica:

$AM = MC = MB$

- En ◺ABP: $\alpha > 90° \Rightarrow a > 2$ ... (I)
- En ΔABM : $a < 2x$ ... (II)
- De (I) y (II): $2x > a > 2$

$\Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > 1$ ... (III)

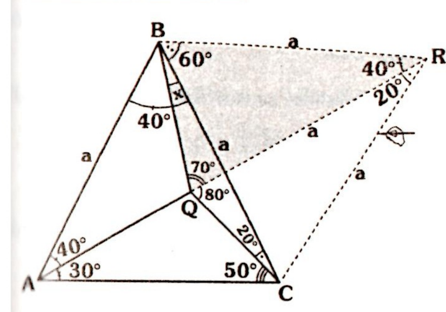
- En ACT: $2x < 6 \Rightarrow x < 3$ ... (IV)
- De (III) y (IV):

$1 < x < 3$

- Por lo tanto el valor entero de x es: **2**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 216



- Piden: x
- Como $m\sphericalangle BAQ = 40°$ y $m\sphericalangle BQR = 70°$, de acuerdo a los criterios de trazos auxiliares, se prolonga $\overline{AQ}$ y se traza $\overline{BR}$ tal que $m\sphericalangle BRA = 40° \Rightarrow BR = a$
- Como: $CB = BR = a$ y

$m\sphericalangle CBR = 60° \Rightarrow \Delta CBR$

es equilátero $\Rightarrow CR = a$

- Luego:

ΔQRC : isósceles $\Rightarrow QR = RC = a$

- Como

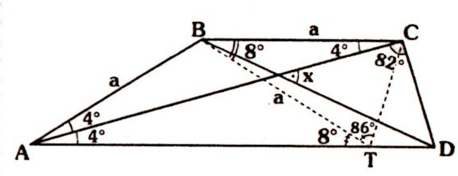
$QR = RB \Rightarrow m\sphericalangle BQR = m\sphericalangle QBR = 70°$

$\Rightarrow 60° + x = 70°$

$\therefore$ **x = 10°**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 217



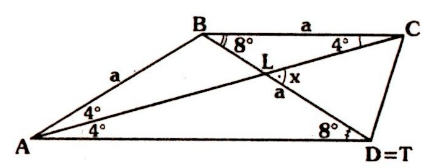
- Piden: x
- Del gráfico AB=BC y $\overline{AD} // \overline{BC}$ desde B se va a trazar el segmento $\overline{BT}$, tal que BT=a y $T \in \overline{AD}$.
- Para "T" se tiene las siguientes posibilidades:
  - "T" esté a la izquierda de D (como en el gráfico).
  - "T" esté a la derecha de D.
  - "T" coincida con D.
- Tomando el primer caso, se tendrá:

ΔBTC isósceles

$\Rightarrow m\sphericalangle BCT = m\sphericalangle BTC = 86°$

con ello se deduce $m\sphericalangle ACT = 82°$, lo cual no puede ser, pues $m\sphericalangle ACD = 82°$.

- En forma análoga se descarta la segunda posibilidad con ello se deduce: T=D, el gráfico quedaría asi:

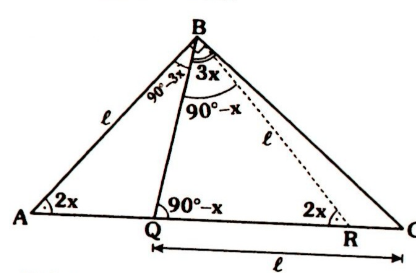


- En ΔALD : $x = 4° + 8°$

$\therefore$ **x = 12°**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 218



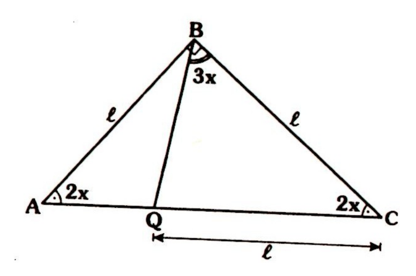
- Piden: x
- Completando ángulos se tiene :

$m\measuredangle BAC = 2x$ y $m\measuredangle BQC = 90° - x$

- Se traza $\overline{BR}$ tal que $m\measuredangle BRA = 2x$, pero para el punto R, así como el problema anterior hay tres posibilidades.
- Como ΔABR y ΔQRB :

isósceles $\Rightarrow$ $AB = BR = QR = \ell$

pero $QC = \ell$, es decir: $QR = QC$, de donde se deduce R=C, el gráfico quedaría, asi:

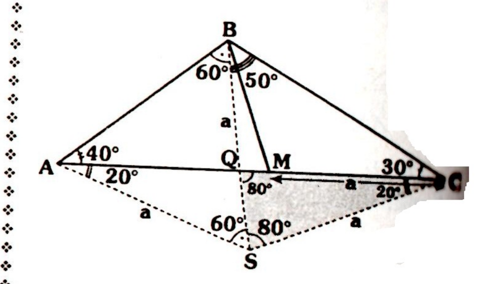


- Como $AB = BC \Rightarrow 2x + 2x = 90°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 22°30'}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 219



- Piden: x
- Se traza $\overline{AS}$ y tal que: ΔABS equilátero, con ello tendremos:

$AS = SB = a$ y $m\measuredangle ASB = 2(m\measuredangle ACB)$

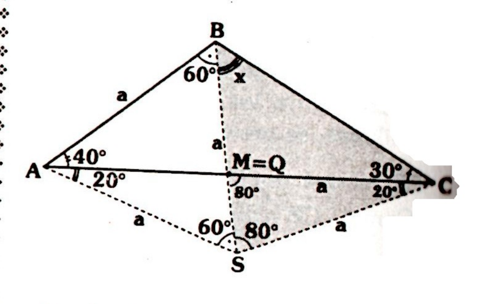
$\Rightarrow SC = a$ *(De la observación indicada en el estudio del triángulo isósceles, ver pág. 22).*

ΔBSC : isósceles $\Rightarrow m\measuredangle SBC = m\measuredangle SCB = 90°$

$\Rightarrow m\measuredangle SCM = 20° \Rightarrow \Delta SQC$: isósceles

$\Rightarrow QC = CS = a$, pero por dato: $CM = a$

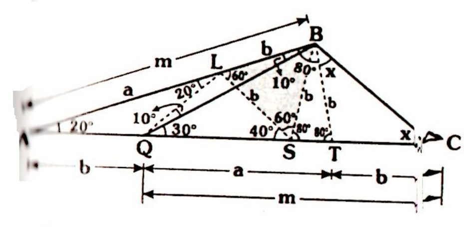
- Es decir: $CM = CQ = a \Rightarrow M = Q$, el gráfico quedaría, así:



- De donde: $\mathbf{x = 50°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 220



- Nos piden: x
- En ΔAQB se tiene:

$m\measuredangle BAQ = 2(m\measuredangle ABL)$

Se traza $\overline{QL}$ tal que:

$m\measuredangle BQL = 10° \Rightarrow AQ = QL = LB = a$

- Se traza luego $\overline{BT}$ tal que:

$m\measuredangle ATB = 80°$

ΔABT : isósceles $\Rightarrow AB = AT = m$,

como $m = a + b$

Del dato: $QC = m \Rightarrow TC = b$

Se traza $\overline{LS}$ tal que:

$m\measuredangle ASL = 40° \Rightarrow LS = b$

- Se tendrá luego:

$SL = LB$ y $m\measuredangle SLB = 60°$

$\Rightarrow \Delta BLS$ equilátero $\Rightarrow SB = b$ y

$m\measuredangle BST = 80°$

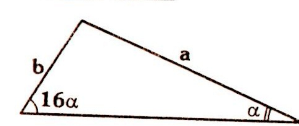
- Luego ΔSBT : isósceles $\Rightarrow TB = b$
- Finalmente, el ΔTCB es isósceles

$\Rightarrow$ $x + x = 80°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 40°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 221

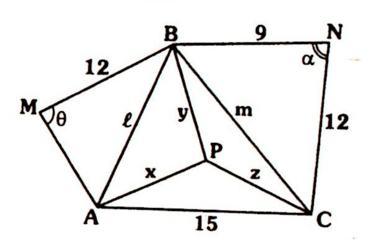


- Nos piden la relación entre a y b.
- Es una aplicación directa del teorema 56, para $n = 16$:

$$\mathbf{b < a < 16b}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 222



- Piden el mayor valor entero de:

$x + y + z$

- Dato: - "ℓ" es menor entero
  - "m" es mayor entero
  - $\alpha < 90°$ y $\theta > 90°$
- En ΔBNC , como $\alpha < 90°$

$\Rightarrow m^2 < 12^2 + 5^2 \Rightarrow m < 13$

- Como "m" es mayor entero $\Rightarrow m = 12$
- En ΔAMB , como $\theta > 90°$,se puede asegurar: $\ell > 12$

como ℓ es menor entero $\Rightarrow \ell = 13$

- En ΔABC :

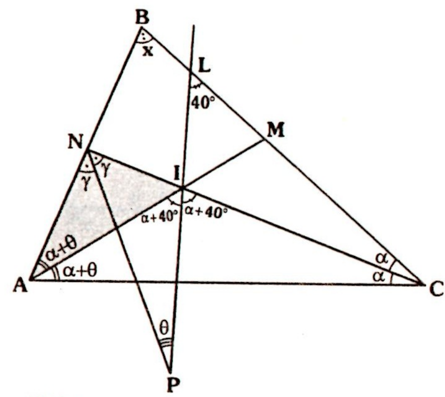
$$\frac{\ell + m + 15}{2} < x + y + z < \overbrace{13 + 15}^{\text{dos mayores}}$$

$\Rightarrow$ $20 < x + y + z < 28$

- Por lo tanto el mayor valor entero de $x + y + z$, es **27**.

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 223



- Piden: x
- En ΔIAN , por ángulo entre bisectrices (*teorema* 27):

$$m\sphericalangle NPI = \frac{m\sphericalangle IAN}{2} \Rightarrow \theta = \alpha$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle IAC = 2\alpha$$

- En ΔAIC :

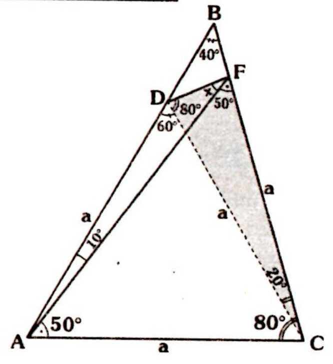
$$2\alpha + 2\alpha + 80° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 20°$$

- En $\Delta ABC : x + 40° + 80° = 180°$

$$\therefore \mathbf{x = 60°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 224



- Piden: x
- Como AD=AC y $m\sphericalangle DAC = 60°$

$\Rightarrow \Delta ACD$ es equilátero $\Rightarrow CD = a$ y

$m\sphericalangle ACD = 60°$

ΔACF : isósceles

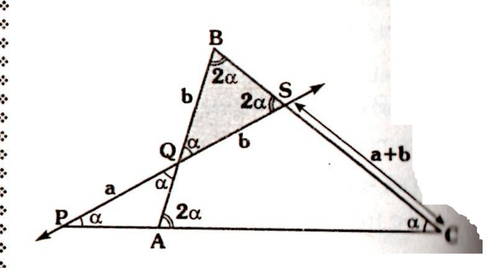
$$\Rightarrow m\sphericalangle DFC = m\sphericalangle FDC = 80°$$

$$\Rightarrow x + 50° = 80°$$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave [illegible]

RESOLUCIÓN Nº 225



- Piden: α
- Dato: $SC - PQ = QB$

$$\Rightarrow SC = PQ + QB$$

- ΔPSC : isósceles

$$\Rightarrow PS = SC = a + b$$

$$\Rightarrow QB = QS = b$$

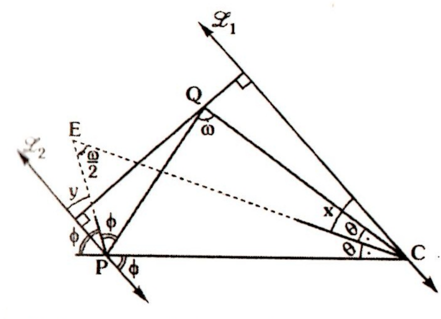
- ΔQBS : isósceles

$$\Rightarrow 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180°$$

$$\therefore \alpha = 36°$$

Clave [illegible]

RESOLUCIÓN Nº 226



- Piden ω en función de x e y
- En ΔPQC por ángulo entre bisectrices (teorema 27):

$$m\sphericalangle PEC = \frac{\omega}{2}$$

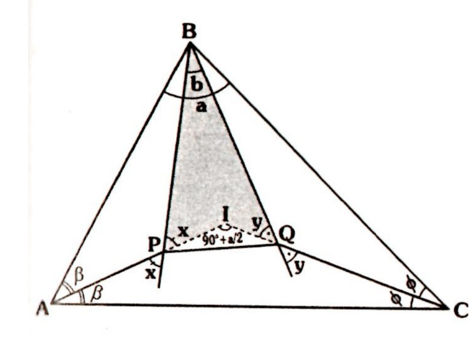
- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, por teorema:

$$\frac{\omega}{2} = x + y$$

$$\therefore \mathbf{\omega = 2(x + y)}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 227



- Piden: x
- Dato: $a - 2b = 20°$
- Por ángulo entre bisectrices:

$$m\sphericalangle AIC = 90° + \frac{a}{2}$$

- En la región sombreada ( ):

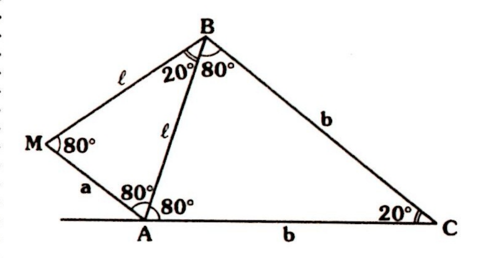
$$x + y + b = 90° + \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow x + y = 90° + \left(\frac{a - 2b}{2}\right)$$

$$\therefore \mathbf{x + y = 100°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 228



- Nos piden la relación entre b y a.
- En ΔABC y ΔMBA por teorema 51:

$$2 < \frac{b}{\ell} < 3 \qquad \ldots \text{(I)}$$

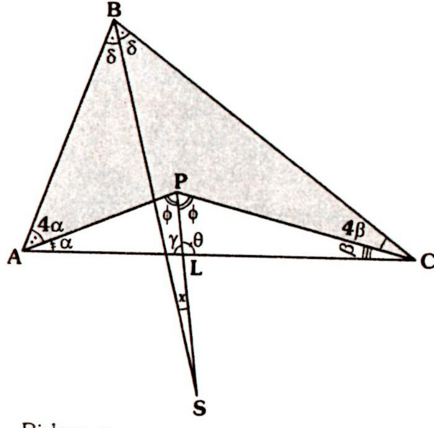
$$2 < \frac{\ell}{a} < 3 \qquad \ldots \text{(II)}$$

- De (I) y (II):

$$\mathbf{4 < \frac{b}{a} < 9}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 229



- Piden: x
- Dato: $\theta - \gamma = 20°$
- En la parte sombreada, por teorema 30:

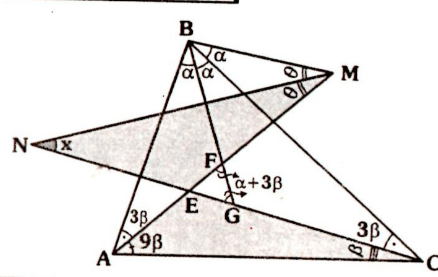
$$x = \frac{4\alpha - 4\beta}{2} \Rightarrow x = 2(\alpha - \beta)$$

- Del gráfico: $\theta = \alpha + \phi$

$$\gamma = \beta + \phi$$
$$\Rightarrow \theta - \gamma = \alpha - \beta$$
$$\Rightarrow \alpha - \beta = 20°$$
$$\therefore \mathbf{x = 40°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 230



- Piden: x en función de β.

ΔEFG: isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle EGF = m\measuredangle FFG = \alpha + 3\beta$

$\Rightarrow m\measuredangle BAF = 3\beta$

- Como

$m\measuredangle CAM = 3m\measuredangle MAB \Rightarrow m\measuredangle CAM = 9\beta$

- En ΔABC:

$2\alpha + 16\beta = 180° \Rightarrow \alpha + 8\beta = 90°$ ... (I)

- En la parte sombreada ($\bowtie NMAC$)

$x + \theta = 10\beta$ ... (II)

- En $\bowtie NCBM$:

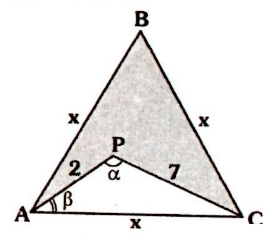
$x + 3\beta = \alpha + \theta$ ... (III)

- Sumando (II) y (III):

$$2x = 7\beta + \alpha$$
$$\Rightarrow 2x = \underbrace{8\beta + \alpha}_{90°} - \beta$$
$$\therefore \mathbf{x = 45° - \frac{\beta}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 231



- Piden la razón entre los valores máximo y mínimo entero del perímetro
- Analicemos las restricciones para x.
- En ΔAPC: por existencia

$5 < x < 9$ ... (I)

- En la parte sombreada:

$x + x > 2 + 7 \Rightarrow x > 4,5$ ... (II)

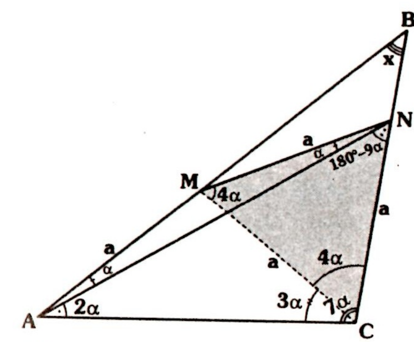
- Como $\alpha > 60°$ y $\beta < 60° \Rightarrow \alpha > \beta$
- En ΔAPC: $x > 7$ ... (III)
- De (I), (II) y (III): $7 < x < 9$
- Multiplicando 3:

$$21 < \underbrace{3x} < 27$$
$$21 < \text{Perím}_{\blacktriangle ABC} < 27$$
$$\Rightarrow \text{Perím}_{\blacktriangle ABC(\text{máximo entero})} = 26$$
$$\text{Perím}_{\blacktriangle ABC(\text{mínimo entero})} = 22$$

- Por lo tanto la razón entre ellos es: $\frac{13}{11}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 232



- Piden: x

En ΔABC: $x + 10\alpha = 180°$ ... (I)

En ΔANC: $m\measuredangle CNA = 180° - 9\alpha$

$\Rightarrow m\measuredangle MNC = 180° - 8\alpha$

- Como

$MN = NC \Rightarrow m\measuredangle NMC = m\measuredangle MCN = 4\alpha$

$\Rightarrow m\measuredangle ACM = 3\alpha \Rightarrow AM = MC = a$

$\Rightarrow \Delta MNC$: equilátero

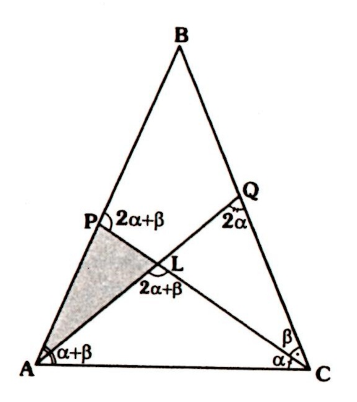
$4\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 15°$

- En (I): $x + 10(15°) = 180°$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 233



- Nos piden la relación entre AL y AP.
- Sea $m\measuredangle PCB = \beta$
- Como :

$AB = BC \Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle ACB = \alpha + \beta$

- En ΔAPC, por ángulo exterior:

$m\measuredangle BPC = 2\alpha + \beta$

- En ΔLQC:

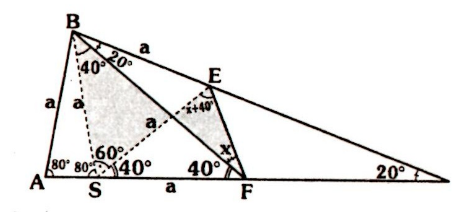
$m\measuredangle ALC = 2\alpha + \beta$

- Como el ΔALP tiene dos ángulos exteriores de igual medidas $\Rightarrow$ es isósceles

$$\therefore \mathbf{AL = AP}$$

Clave D

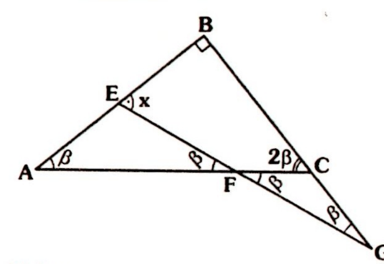
RESOLUCIÓN Nº 234



- Piden: x
- En $\triangle ABF$ $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BFA)$
- Se traza $\overline{BS}$ tal que $m\measuredangle FBS = 40°$
  $\Rightarrow AB = BS = SF = a$
- Como:
  $BE = BS$ y $m\measuredangle SBE = 60° \Rightarrow \triangle EBS$ es equilátero $\Rightarrow SE = a$
- $\triangle SEF$ es isósceles
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle SFE = m\measuredangle SEF = 40° + x$
- En la parte sombreada:
  $x + x + 40° = 40° + 60°$
  $\therefore$ $\mathbf{x = 30°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 235

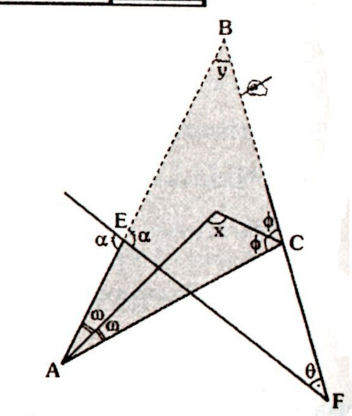


- Piden: x
- Dato: $\triangle AEF$ y $\triangle FCB$: isósceles
- Como $m\measuredangle AEF > 90°$ y $m\measuredangle FCG > 90°$
  $\Rightarrow m\measuredangle EAF = m\measuredangle EFA = m\measuredangle FGC = \beta$

- En $\triangle ABC$: $\beta + 2\beta = 90° \Rightarrow \beta = 30°$
- En $\triangle AEF$: $x = 2\beta$
  $\therefore$ $\mathbf{x = 60°}$

Clave D

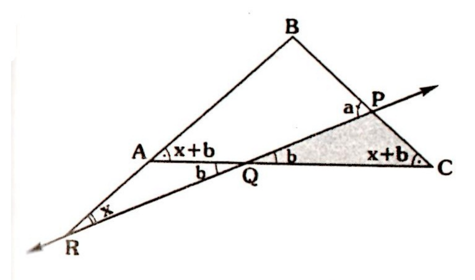
RESOLUCIÓN Nº 236



- Piden: $x_{(\text{menor entero})}$
- Dato: $\alpha + \theta < 170°$
- En $\triangle EFB$, como $\alpha + \theta < 170°$
  $\Rightarrow y > 10°$ ... (I)
- En $\triangle ABC$,por ángulo entre bisectrices
  $x = 90° + \dfrac{y}{2}$
- En (I): $y > 10° \Rightarrow \dfrac{y}{2} > 5°$
  $\Rightarrow \underbrace{90° + \dfrac{y}{2}}_{x} > 95°$
  $\Rightarrow$ $x > 95°$
- El menor valor entero de x es 96°

Clave D

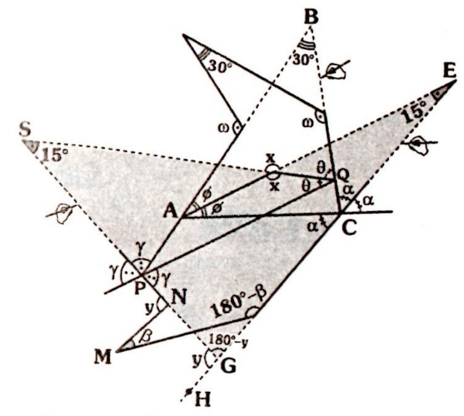
RESOLUCIÓN Nº 237



- Piden: x en función de a y b
- Dato: $\triangle ABC$ es isósceles (de base AC)
  $\Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle BCA = x + b$
- En $\triangle QPC$: $x + 2b = a$
  $\therefore$ $\mathbf{x = a - 2b}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 238



- Se nos pide: x + y
- Por teorema 27 (*ángulo entre bisectrices*), en:

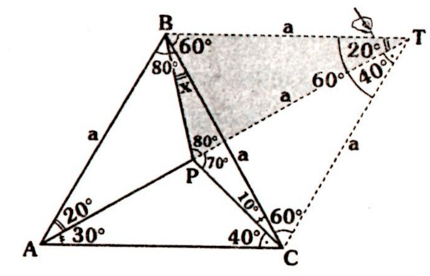
$\triangle ABC$: $m\measuredangle AEC = \dfrac{30°}{2} \Rightarrow m\measuredangle AEC = 15°$

$\triangle PBQ$: $m\measuredangle PSQ = \dfrac{30°}{2} \Rightarrow m\measuredangle PSQ = 15°$

- Se tiene $\overline{MN} \,//\, \overline{GC} \Rightarrow m\measuredangle HGS = y$
- En la parte sombreada:
  $x = 15° + 15° + 180° - y$
  $\therefore$ $\mathbf{x + y = 210°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 239



- Piden: x
- Del gráfico AB = BC
- Se prolonga $\overline{AP}$ y se traza $\overline{BT}$ tal que:
  $m\measuredangle ATB = 20° \Rightarrow BT = a$
- Se tiene entonces $CB = BT$ y $m\measuredangle CBT = 60° \Rightarrow \triangle CTB$ es equilátero

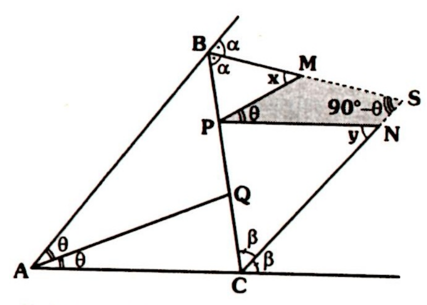
$\Rightarrow CT = a$ y como $m\measuredangle TPC = m\measuredangle PCT = 70°$

$\Rightarrow \triangle PTC$ es isósceles $(PT = TC = a)$

- $\triangle PTB$: isósceles
  $\Rightarrow m\measuredangle PCB = m\measuredangle BPT = 80°$
  $\Rightarrow$ $x + 60° = 80°$
  $\therefore$ $\mathbf{x = 20°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 240



- Piden: $x+y$
- Como $\overline{PM} // \overline{AQ}$ y

$$\overline{AC} // \overline{PN} \Rightarrow m\sphericalangle NPM = \theta$$

- En ΔABC, por ángulo entre bisec-trices (*teorema* 26):

$$m\sphericalangle BSC = 90° - \frac{m\sphericalangle BAC}{2}$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle BSC = 90° - \theta$$

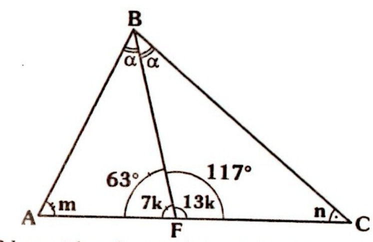
- En ⊳PMSN:

$$x + y = 90° - \theta + \theta$$

$$\therefore \mathbf{x + y = 90°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 241



- Nos piden la medida del menor ángulo interior del ΔABC.
- Dato: ΔABC es escaleno y las medidas de sus ángulos interiores son menores que 80°
- $7k + 13k = 180° \Rightarrow k = 9°$
- Dato: $m < 80°$, $n < 80°$ y

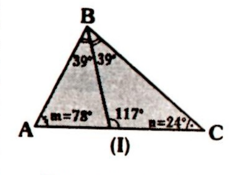
$$2\alpha < 80° \Rightarrow \alpha < 40°$$

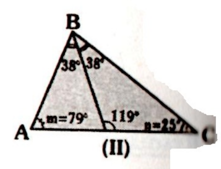
- En ΔABF: $m + \alpha = 117°$
- Como:

$$\alpha < 40° \Rightarrow \underbrace{\alpha + m}_{117°} < 40° + m \Rightarrow 77° < m$$

- Del dato: $77° < m < 80°$

m tiene dos valores enteros: 78° y 79°, con ellos tenemos los siguientes triángulos:



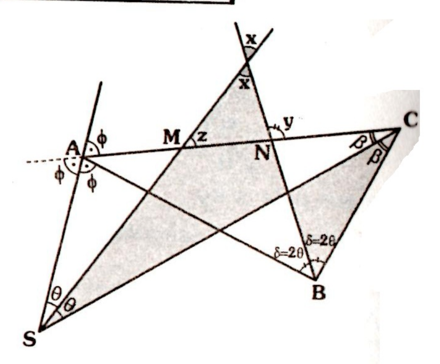


- Pero en el caso I, resulta ser un Δ isósceles, la condición solo cumple el caso II.

Por lo tanto la medida del menor ángulo es **25°**.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 242



- Piden: $\frac{x}{y}$
- En ΔABC, por ángulo entre bisec-trices (teorema 27):

$$m\sphericalangle ASC = \frac{m\sphericalangle ABC}{2} \Rightarrow \delta = 2\theta$$

- En ΔSMC: $z = \beta + \theta$
- En la parte sombreada:

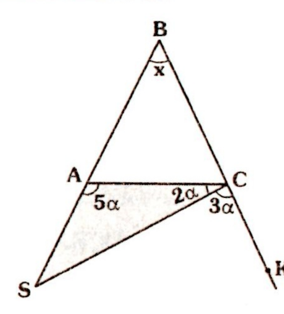
$$x + \theta = \beta + 2\theta \Rightarrow x = \beta + \theta$$

- Luego: $x = z$
- En ΔMLN: $y = x + z \Rightarrow y = 2x$

$$\therefore \mathbf{\frac{x}{y} = 2}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 243



- Nos piden el mayor valor entero de x
- En ΔACS: $3\alpha > x$
- Analicemos las restricciones para α:
- Como ΔABC es isósceles

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle ACK = 5\alpha$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAC < 90° \Rightarrow 5\alpha > 90°$$

$$\Rightarrow \alpha > 18° \quad \text{... (I)}$$

- $5\alpha < 180° \quad \Rightarrow \alpha < 36° \quad \text{... (II)}$
- En ΔACB:

$$5\alpha + 2\alpha < 180° \Rightarrow \alpha < \frac{180°}{7} \quad \text{... (III)}$$

- De (I), (II) y (III):

$$18° < \alpha < \frac{180°}{7}$$

- Como: $x < 3\alpha$ y

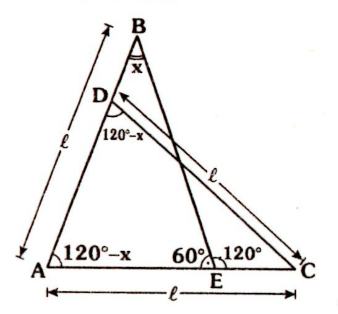
$$\alpha < \frac{180°}{7} \Rightarrow 3\alpha < \frac{540°}{7}$$

$$\Rightarrow x < \frac{540°}{7} \Rightarrow x < 77{,}1°$$

- Por lo tanto el mayor valor entero de x es **77°**.

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 244



- Nos piden la cantidad de valores enteros de x.
- En ΔACD isósceles

$$120° - x < 90° \Rightarrow 30° < x \quad \text{... (I)}$$

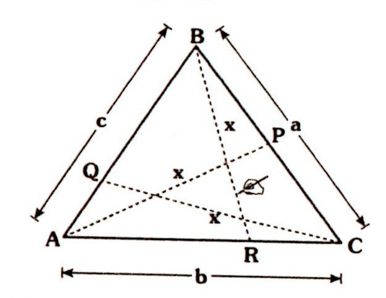
- En ΔAEB:

$$AE < \ell \Rightarrow x < 60° \quad \text{... (II)}$$

- De (I) y (II): $30° < x < 60°$
- La cantidad de valores enteros es **19**.

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 245



- Nos piden el intervalo para x.
- Dato: $AP = CQ = BR$

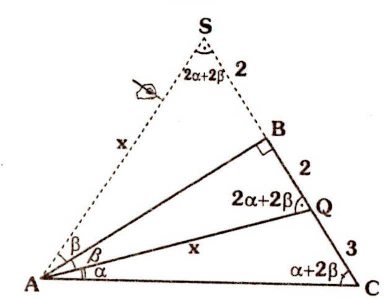
$$\frac{a+b+c}{2} = p$$

- Por teorema:

$$p-a<x<p$$
$$p-b<x<p$$
$$p-c<x<p$$
$$\Rightarrow 3p-\underbrace{(a+b+c)}_{2p}<3x<3p$$
$$\therefore \frac{p}{3}<x<p$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 246



- Piden: x
- Dato: $2\alpha + 3\beta = 90°$
- Se prolonga $\overline{CB}$ y se traza $\overline{AS}$, tal que:

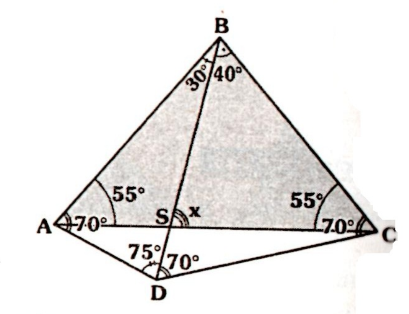
$$m\measuredangle ASB = 2\alpha + 2\beta \Rightarrow AQ = AS = x$$
$$\text{y} \quad SB = BQ = 2$$

- Como: $m\measuredangle CAS = m\measuredangle ACS = \alpha + 2\beta$

$$\Rightarrow AS = SC$$
$$\therefore \mathbf{x = 7}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 247



- Piden: x
- De los datos, se verifica:

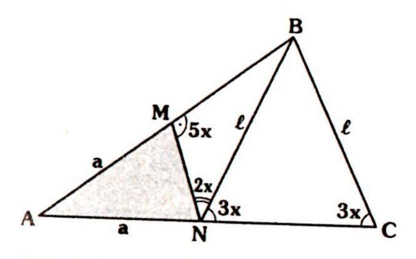
$$m\measuredangle BDC = m\measuredangle DCB = 70°$$
$$m\measuredangle BDA = m\measuredangle DAB = 75°$$
$$\Rightarrow AB = BD = BC = \ell$$
$$\Rightarrow \Delta ABC : \text{isósceles}$$
$$\Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle ACB = 55°$$

- En ΔSAB:

$$x = 30° + 55°$$
$$\therefore \mathbf{x = 85°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 248



- Nos piden el número de valores enteros de $m\measuredangle BNM$.
- En el gráfico:

$$m\measuredangle BNM = 2x$$

- Analicemos todas las restricciones para x:

En ΔAMN (isósceles)

$$5x > 90° \Rightarrow x > 18° \quad \ldots (I)$$

En ΔBNC (isósceles)

$$3x < 90° \Rightarrow x < 30° \quad \ldots (II)$$

En ΔNMB:

$$2x + 5x < 180° \Rightarrow x < \frac{180°}{7} \quad \ldots (III)$$
$$18° < x < \frac{180°}{7}$$
$$\Rightarrow 36° < \underbrace{2x}_{} < \frac{360°}{7}$$
$$36° < m\measuredangle BNM < 51,43°$$

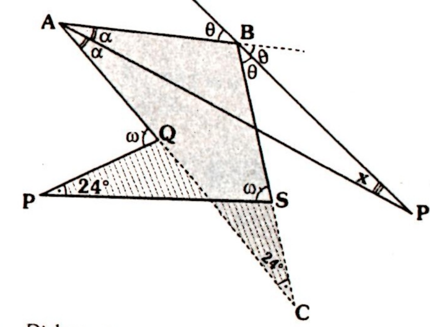
El conjunto de valores enteros de $m\measuredangle BNM$ es:

$$\{37°; 38°; 39°; \ldots 50°; 51°\}$$

El número de valores enteros es **15**.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 249

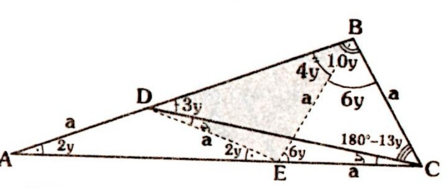


- Piden: x
- Al prolongar $\overline{AQ}$ y $\overline{BS}$ se cortan en C, se cumple: $m\measuredangle QCS = 4°$
- En ΔABC, por ángulo entre bisectrices (teorema 27):
- En ΔABC: $m\measuredangle APB = \dfrac{m\measuredangle AC\theta}{2}$

$$\therefore \mathbf{x = 12°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 250



- Piden: y
- En ΔADC, como $m\measuredangle DAC = 2(m\measuredangle DCA)$

Se traza $\overline{DE}$ tal que $m\measuredangle CDE = y$

$$\Rightarrow AD = DE = EC = a$$

- En ΔECB, como $EC = CB$ y

$$m\measuredangle ECB = 180° - 12y$$
$$\Rightarrow m\measuredangle BEC = m\measuredangle EBC = 6y$$

- ΔDEB : isósceles $\Rightarrow DE = EB = a$

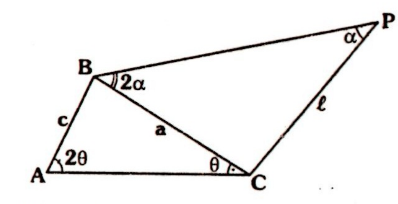
$\Rightarrow \Delta EBC$: equilátero

$\Rightarrow 4y = 60°$

$\therefore$ **y = 15°**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 251



- Nos piden la relación entre c y ℓ.
- Por teorema 39:

En ΔBCP: $\ell < 2a$ ... (I)

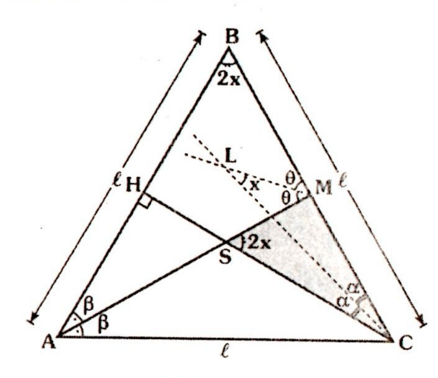
En ΔABC: $a < 2c \Rightarrow 2a < 4c$ ... (II)

- De (I) y (II): $\ell < 2a < 4c$

$\therefore \boldsymbol{\ell < 4c}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 252



- Piden: $m\measuredangle ABC$
- Dato: AB=BC y $m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle MLC)$

- En ΔCMS, por ejemplo entre bisectrices (*teorema* 27):

$$m\measuredangle MLC = \frac{m\measuredangle MSC}{2} \Rightarrow m\measuredangle MSC = 2x$$

- Luego, como $m\measuredangle ABC = m\measuredangle MSC$

$\Rightarrow m\measuredangle AMB = 90°$

- Como: $\beta + 2x = 90° \Rightarrow m\measuredangle ACB = 2x$

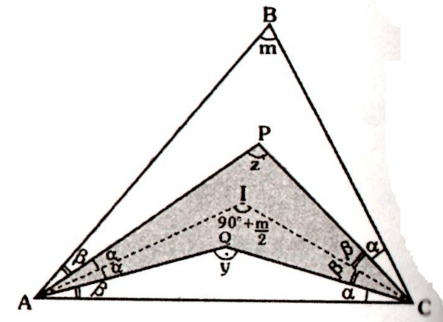
$\Rightarrow AB = AC$

- ΔABC: equilátero $\Rightarrow 2x = 60°$

$\therefore$ **$m\measuredangle ABC = 60°$**

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 253



- Piden el mayor valor entero de: $x + y$
- Dado: ΔABC es acutángulo
- Se traza las bisectrices de los ángulos BAC y ACB, las cuales se cortan en I.
- Por teorema 25:

$$m\measuredangle AIC = 90° + \frac{m}{2}$$

- En la parte sombreada, por teorema 29:

$$\frac{x+y}{2} = 90° + \frac{m}{2}$$

- Como ΔABC es acutángulo $\Rightarrow m < 90°$

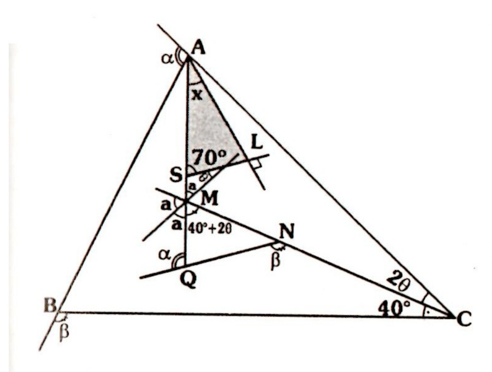
$$\frac{m}{2} < \frac{90°}{2} \Rightarrow \underbrace{90° + \frac{m}{2}}_{\frac{x+y}{2}} < 135°$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{2} < 135° \Rightarrow x + y < 270°$$

- Por lo tanto el mayor valor entero de $x + y$ es: **269°**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 254



- Piden: x
- En ΔABC y ΔMNQ, tienen dos partes de ángulos exteriores respectivamente iguales:

$\Rightarrow m\measuredangle ACB = m\measuredangle QMN = 40° + 2\theta$

$\Rightarrow 2a + 40° + 2\theta = 180° \Rightarrow a + \theta = 70°$

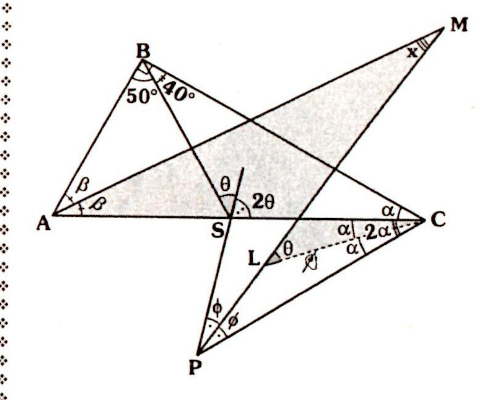
- En ◺ALS:

$x + 70° = 90°$

$\therefore$ **x = 20°**

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 255



- Nos piden **x** en función de β.
- En ΔPCS se traza $\overline{CL}$, bisectriz del

$\measuredangle SCP \Rightarrow 2\theta = 2\alpha + 2\phi \Rightarrow \theta = \alpha + \phi$

- En ΔPLC: $m\measuredangle MLC = \underbrace{\alpha + \phi}_{\theta}$

- En la parte sombreada (⧖):

$x + \beta = \alpha + \theta$ ... (I)

- En ◺ABC: $\alpha = 90° - 2\beta$
- En ΔABS:

$$3\theta = 2\beta + 50° \Rightarrow \theta = \frac{2\beta + 50°}{3}$$

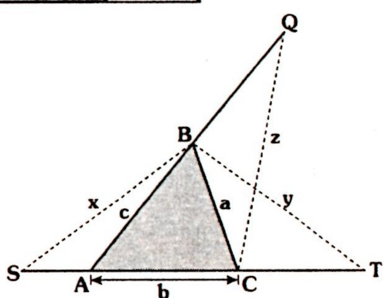
- En (I):

$$x + \beta = (90° - 2\beta) + \frac{(2\beta + 50°)}{3}$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{320° - 7\beta}{3}}$$

Clave D

Resolución Nº 256



- Piden el menor valor entero de:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}$$

- Dato: $\frac{a+b+c}{2}=p$

$$xyz=\frac{1}{k^3}$$

- Sea: $E=\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}$

- Por teorema 44:

$$y>p-c$$
$$x>p-a$$
$$z>p-b$$

- Multiplicando:

$$xyz>(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k^3}>(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}>\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- Usando el siguiente teorema: MG ≥ MH para $(p-a),(p-b)$ y $(p-c)$

$$\frac{1}{k}>\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}\geq\frac{3}{\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}>\frac{3}{\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}}$$

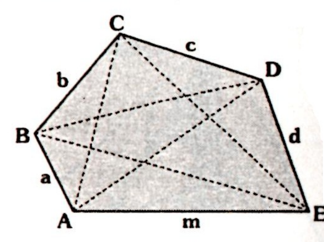
$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}}_{E}>3k$$

$$\Rightarrow E>3k$$

- Como k es entero, el menor valor entero de k es $\mathbf{3k+1}$.

Clave C

Resolución Nº 257



- Piden entre que valores esta:

$$AC+BD+CE+DA+EB$$

- Dato: $m>d>c>b>a$

$$a+b+c+d+m=\ell$$

- Por existencia en:

$\Delta ABC: \ b-a<AC<a+b$

$\Delta BCD: \ c-b<BD<b+c$

$\Delta CDE: \ d-c<CE<d+c$

$\Delta ADE: \ m-d<AD<m+d$

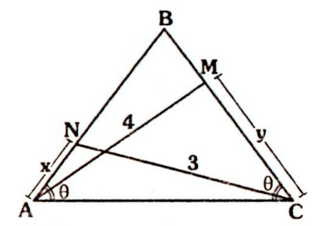
$\Delta ABE: \ m-a<EB<m+a$

- Sumando:

$2m-2a<AC+BD+CE+AD+EB<2\ell$

Clave D

Resolución Nº 258



- Piden el mayor valor entero de: $x+y$
- Dato: AB = BC
- Por observación indicado en teorema 45:

$\Delta ANC: \ x<3$

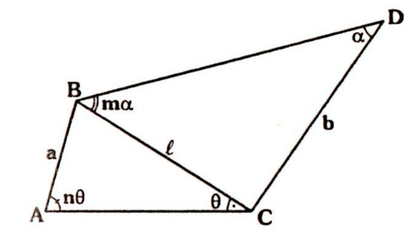
$\Delta AMC: \ y<4$

$$\Rightarrow x+y<7$$

- Por lo tanto el mayor valor entero de $x+y$ es: **6**

Clave C

Resolución Nº 259



- Nos piden la relación entre a, b, m y n.
- Por teorema 56, en:

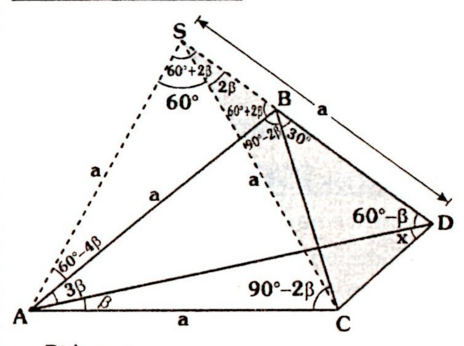
$\Delta BCD: \ b<m\ell$ ... (I)

- $\Delta ABC: \ \ell<na\Rightarrow m\ell<mna$ ... (II)
- De (I) y (II): $b<m\ell<mna$

$$\therefore \mathbf{b<mna}$$

Clave A

Resolución Nº 260



- Piden: x
- Completamos ángulos, se tiene:

$m\measuredangle ABC=m\measuredangle ACB=90°-2\beta\Rightarrow AB=AC$

- También: $m\measuredangle ADB=60°-\beta$

y $m\measuredangle ABS=60°-2\beta$

- Se traza $\overline{AS}$ tal que:

$m\measuredangle ASB=60°+2\beta\Rightarrow AB=AS$ y

$m\angle SAC=60°$

$\Rightarrow \Delta ASC$: equilátero $\Rightarrow m\measuredangle CSD=2\beta$ y

$CS=SD=a\Rightarrow \Delta CSD$: isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle SDC=m\measuredangle SCD=90°-\beta$$

$$\Rightarrow 60°-\beta+x=90°-\beta$$

$$\therefore \mathbf{x=30°}$$

Clave C

Solucionario
Ciclo Repaso

RESOLUCIÓN Nº 261

- Analicemos las proposiciones

I. Como un triángulo se obtiene a partir de tres puntos no colineales, entonces el mayor número de triángulos que se obtiene con 8 puntos como vértices es:

$$C_3^8 = 56$$

La proposición es verdadera.

II. A partir del estudio de naturaleza del triángulo, como: $4^2 > \sqrt{7}^2 + 2^2$, el triángulo es obtusángulo.

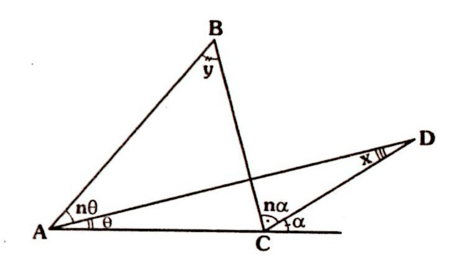
La proposición es verdadera.

III. Un triángulo escaleno puede ser oblicuángulo (obtusángulo o acutángulo) o rectángulo.

La proposición es falsa.

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 262



- Piden x, en función de "n" e "y"

- En ΔADC: $x = \alpha - \theta$

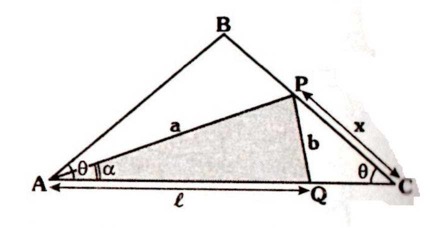
- En ΔABC: $y = (n+1)\alpha - (n+1)\theta$

$$\Rightarrow y = (n+1)\underbrace{(\alpha - \theta)}_{x}$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{y}{n+1}}$$

Clave [illegible]

RESOLUCIÓN Nº 263



- Nos piden el mayor valor entero de x
- Dato: $a + b + \ell = 20$
- En ΔAPC: como $\alpha < \theta \Rightarrow x < a$ ... (I)
- En ΔAPQ: $a < b + \ell \Rightarrow 2a < \underbrace{a + b + \ell}_{20}$

$$\Rightarrow a < 10 \quad \text{... (II)}$$

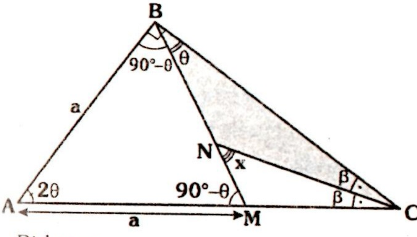
- De (I) y (II):

$$x < a < 10 \Rightarrow x < 10$$

- Por lo tanto el mayor valor entero de x, es **9**

Clave [illegible]

RESOLUCIÓN Nº 264



- Piden: x
- $\Delta CBN: x = \beta + \theta$
- ΔABM: isósceles

$$m\measuredangle ABM = m\measuredangle AMB = 90 - \theta$$

$$\Rightarrow m\measuredangle BAC = 2\theta$$

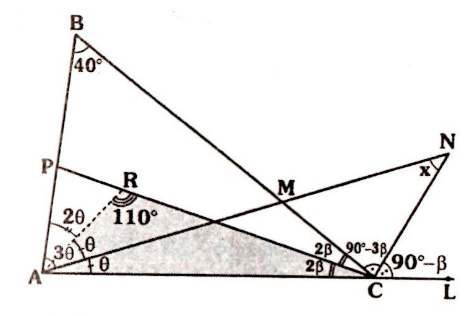
- En $\triangle ABC$: $2\beta + 2\theta = 90°$

$$\Rightarrow \beta + \theta = 45°$$

$$\therefore \mathbf{x = 45°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 265



- Piden: x
- De los datos:

$$m\measuredangle BCN = 90° - 3\beta$$

$$\Rightarrow m\measuredangle PCN = m\measuredangle NCL = 90° - \beta$$

- Se traza $\overline{AR}$ tal que $m\measuredangle BAR = 2\theta$
- Por ángulo entre bisectrices, en:

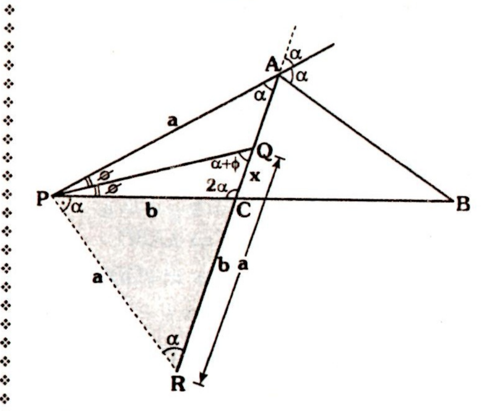
$$\Delta ABC: \; m\measuredangle ARC = 90° + \frac{40°}{2} = 110°$$

$$\Delta ARC: \; m\measuredangle ANC = \frac{110}{2}$$

$$\therefore \mathbf{x = 55°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 266



- Piden: x
- Dato: $a - b = 1$ y $AB = BC$
- Como:

$$AB = BC \Rightarrow m\measuredangle PCA = 2\alpha$$

- En ΔPCA, se tiene:

$$m\measuredangle PCA = 2(m\measuredangle PAC)$$

- Se prolonga $\overline{AC}$ y se traza $\overline{PR}$ tal que $m\measuredangle PRC = \alpha$

$$\Rightarrow PC = RC = b \quad y \quad PA = RP = a$$

- En ΔPQR, se tendrá:

$$m\measuredangle QPR = m\measuredangle PQR = \alpha + \phi$$

$$\Rightarrow RQ = a$$

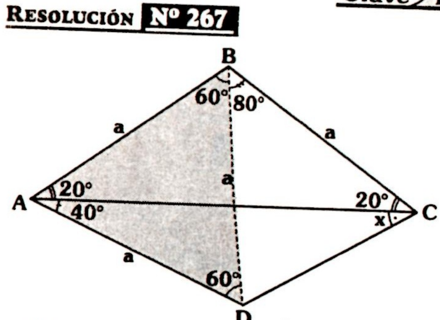
$$x + b = a$$

$$\Rightarrow \quad x = a - b$$

$$\therefore \mathbf{x = 1}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 267



- Piden: x
- Del dato: AB=AD y $m\measuredangle BAD = 60° \Rightarrow \Delta ABD$ equilátero $\Rightarrow BD = a$ y $m\measuredangle DBC = 80°$
- ΔBDC : isósceles

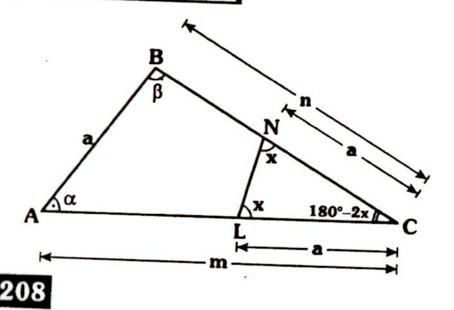
$$\Rightarrow m\measuredangle BDC = m\measuredangle BCD = 50°$$

$$\Rightarrow \quad x + 20° = 50°$$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 268



- Nos piden el menor valor entero de x
- Se tiene $\alpha + \beta = 2x$
- Por teorema de la correspondencia, en el triángulo ABC:

  - Como $m > a \Rightarrow \beta > 180° - 2x$ ... (I)

  $n > a \Rightarrow \alpha > 180° - 2x$ ... (II)

- Sumando (I) y (II):

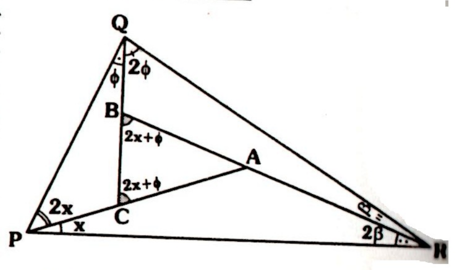
$$\underbrace{\alpha + \beta}_{2x} > 360° - 4x$$

$$\Rightarrow x > 60°$$

- Por lo tanto el menor valor entero de x es **61°**.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 269



- Piden: x
- Dato: AB=BC

$$\Rightarrow m\measuredangle ABC = m\measuredangle BCA$$

$$2\phi + \beta = 2x + \phi \Rightarrow \phi + \beta = 2x$$

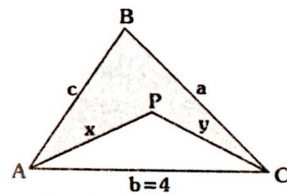
- En ΔPQR: $3x + 3\phi + 3\beta = 180°$

$$\Rightarrow x + \underbrace{\phi + \beta}_{2x} = 60°$$

$$\therefore \mathbf{x = 20°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 270



Piden el valor entero de $x + y$

Dato:

- $a + b + c = 10$
- b, toma su mayor valor entero

En ΔABC:

$$b < a + c \Rightarrow 2b < \underbrace{a + b + c}_{10}$$

$$\Rightarrow b < 5$$

- Del dato: $b = 4 \Rightarrow a + c = 6$
- En la parte sombreada, por teorema 41:

$$x + y < a + c$$

$$\Rightarrow x + y < 6 \quad ... (I)$$

- En ΔAPC: $4 < x + y$ ... (II)
- De (I) y (II):

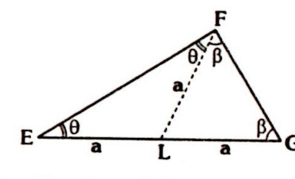
$$4 < x + y < 6$$

Por lo tanto el valor entero de $x + y$, es **5**.

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 271

Analicemos las proposiciones a partir del siguiente gráfico:



Si : EL = LG = LF

$$2\theta + 2\beta = 180° \Rightarrow \theta + \beta = 90°$$

$$\Rightarrow m\measuredangle EFG = 90°$$

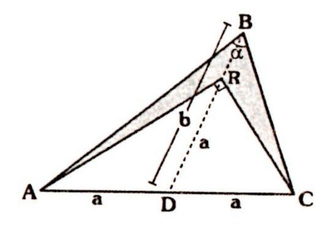
I.

- Como $m < a \Rightarrow$ se prolonga $\overline{DB}$ tal que $DP = a \Rightarrow m\measuredangle APC = 90°$
- En $\triangle$: $\alpha > 90°$

La proposición es verdadera.

II. La proposición es verdadera, es consecuencia del primer gráfico.

III.

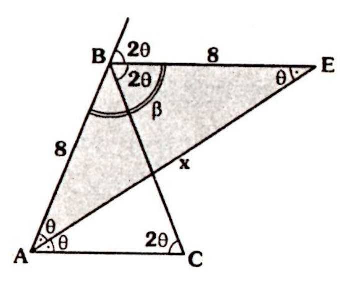


- Como $b > a \Rightarrow$ se ubica R en $\overline{BD}$, tal que $DR = a \Rightarrow m\measuredangle ARC = 90°$
- En $\triangle$: $\alpha < 90°$

La proposición es verdadera.

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 272



- Nos piden la suma del mayor y menor valor entero de x.
- Como $AB = BC \Rightarrow \overline{BE} // \overline{AC}$

  $m\measuredangle BAE = m\measuredangle BEA \Rightarrow AB = BE = 8$
- En ΔABE: $x < 8 + 8 \Rightarrow x < 16$ ... (I)
- Como el triángulo ABC es isósceles:

  $\Rightarrow 2\theta < 90° \Rightarrow \beta > 90°$
- Por teorema 21:

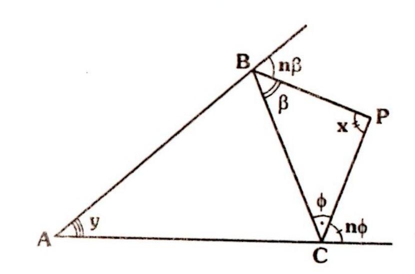
  $x^2 > 8^2 + 8^2$

  $x > 11{,}31$ ... (II)
- De (I) y (II):

  $11{,}31 < x < 16$
- Por lo tanto en mayor valor de x es 15 y el menor es 12. Luego la suma pedida es 27.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 273



- Piden: x
- ΔBPC: $x + \phi + \beta = 180°$
- En ⊿(ABPC):

  $n(\phi + \beta) = x + y$

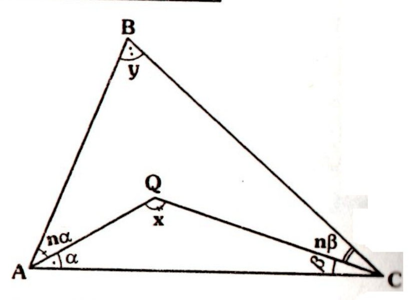
  $\Rightarrow \phi + \beta = \dfrac{x + y}{n}$

$\Rightarrow x + \dfrac{(x + y)}{n} = 180°$

$\therefore \mathbf{x = \dfrac{1}{n + 1}(180°n - y)}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 274



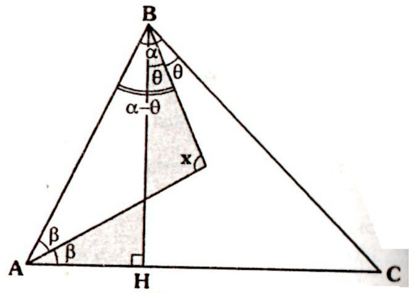
- Nos piden: x
- En ΔAQC: $x + \alpha + \beta = 180°$
- En ABCQ: $x = y + n\alpha + n\beta$

  $\Rightarrow \dfrac{x - y}{n} = \alpha + \beta \Rightarrow x + \dfrac{x - y}{n} = 180°$

  $\therefore \mathbf{x = \dfrac{1}{n + 1}(180°n + y)}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 275



- Piden: x en función de α.

- En ΔABP:

  $x + \beta + \alpha - \theta = 180°$ ... (I)
- En la parte sombreada:

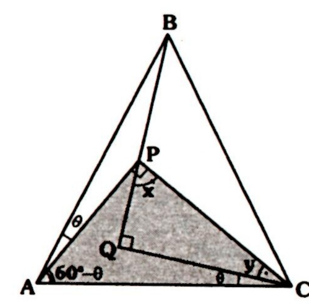
  $x + \theta = 90° + \beta$ ... (II)
- Sumando (I) y (II):

  $2x + \alpha = 270°$

  $\therefore \mathbf{x = 135° - \dfrac{\alpha}{2}}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 276



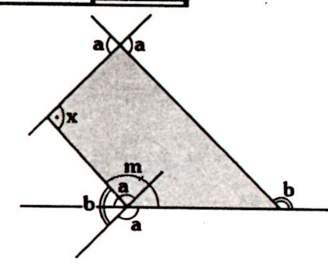
- Piden: x
- En ◺APC: $y + \theta + 60° - \theta = 90°$

  $\Rightarrow y = 30°$
- En ◺PQC: $x + y = 90°$

  $\therefore \mathbf{x = 60°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 277



- Piden: x
- Dato: $a + b = 250°$
- Del gráfico: $a + b + m = 360°$

  $\Rightarrow m = 110°$
- En la parte sombreada:

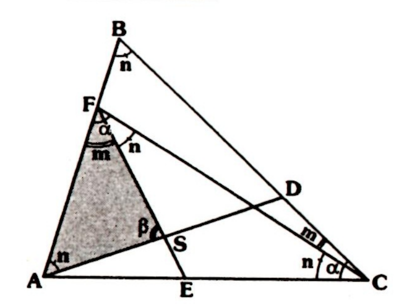
  $x + m = a + b$

  $\Rightarrow x + 110° = 250°$

  $\therefore \mathbf{x = 140°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 278



- Piden: $\alpha + \beta$
- Dato: $EF = EC$ y $AD = DB$

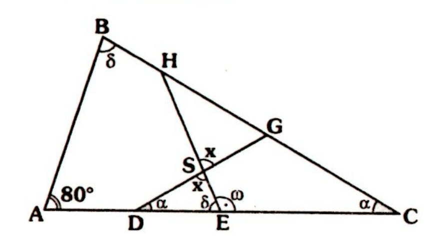
  $\Rightarrow m\measuredangle EFC = m\measuredangle ECF = n$
- Como: $m + n = \alpha \Rightarrow m\measuredangle FCB = m$
- En ΔFBC: $m\measuredangle CBF = n$
- En ΔADB, como $AD = DB$

  $\Rightarrow m\measuredangle DAB = n$
- En ΔABS: $\underbrace{m + n}_{\alpha} + \beta = 180°$

  $\therefore \mathbf{\alpha + \beta = 180°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 279



- Piden: x
- Dato: $\delta+\omega=180°$ y $DG=GC$

$$\Rightarrow m\measuredangle GDC = m\measuredangle DCG$$

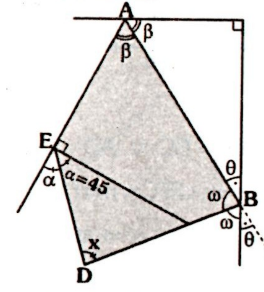
- En ΔABC: $\alpha+\delta+80°=180°$ ...(I)
- En ΔDSE: $\alpha+\delta+x=180°$ ...(II)

De (I) y (II):

$$\mathbf{x=80°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 280



- Piden **x** en función de θ.
- En $\triangle EABD$:

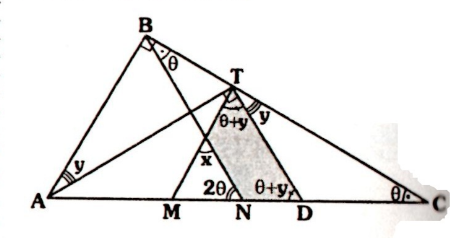
$$x+\beta=45°+\omega+\theta$$

- Pero: $\beta=90°-\theta$ y $\omega=90°-\dfrac{\theta}{2}$

$$\therefore\ \mathbf{x=45°+\dfrac{3}{2}\theta}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 281



- Piden: $\dfrac{x}{y}$
- Dato: $MT=MD$ y $NB=NC$

$$\Rightarrow m\measuredangle NBC = m\measuredangle NCB = \theta$$

$$y \quad m\measuredangle MTD = m\measuredangle TDM = \theta+y$$

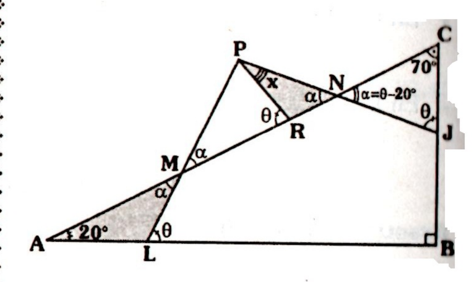
- En $\triangle NSTD$:

$$x+\cancel{2\theta}=\cancel{2\theta}+2y$$

$$\therefore\ \mathbf{\dfrac{x}{y}=2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 282



- Piden: $x+\theta$
- Dato: $MP=PN$
- En $\triangle ABC$: $m\measuredangle BAC=20°$
- En ΔALM: $\alpha+20°=\theta$ ... (I)
- En ΔRNP: $\alpha+x=\theta$ ... (II)

- De (I) y (II): $x+\alpha=\alpha+20°$

$$\Rightarrow x=20°$$

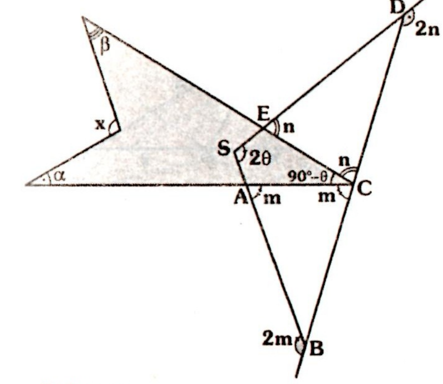
- En ΔNJC:

$$70°+\theta+\theta-20°=180° \Rightarrow \theta=65°$$

$$\therefore\ \mathbf{x+\theta=85°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 283



- Piden: x
- Dato: $\alpha+\beta-\theta=70°$

$AB=BC$ y $ED=DC$

- En ΔBSD: $2m+2n=180°+2\theta$

$$\Rightarrow m+n=90°+\theta$$

- Luego: $m\measuredangle ECA=90°-\theta$
- En la región sombreada:

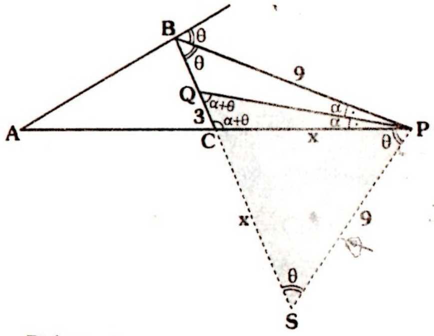
$$x=\alpha+\beta+90°-\theta$$

$$\Rightarrow x=90°+\underbrace{\alpha+\beta-\theta}_{70°}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=160°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 284



- Piden: x
- Dato: $AB=AC$
- En ΔBCP:

$$m\measuredangle BCP = 2(m\measuredangle CBP)$$

- Se prolonga $\overline{BC}$ y se traza $\overline{PS}$ tal que:

$$m\measuredangle PSC=\theta \Rightarrow PS=9$$

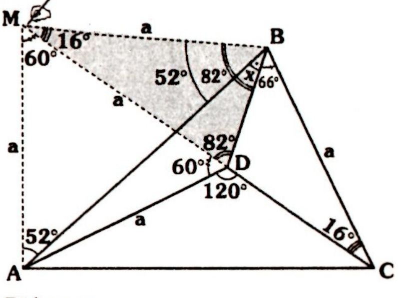
- ΔCSP: isósceles $\Rightarrow CS=CP=x$
- En ΔSQP: $QS=SP$

$$x+3=9$$

$$\therefore\ \mathbf{x=6}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 285



- Piden: x

- Al prolongar $\overline{CD}$ nos damos cuenta:

$m\measuredangle MDB = 86°$ y $m\measuredangle BCD = 16°$

(Corresponde a uno de los criterios de trazos auxiliares)

- Se traza $\overline{BM}$ tal que:

$m\measuredangle BMD = 16° \Rightarrow BC = BM = MD$

- Como $MD = DA$ y $m\measuredangle ADM = 60°$

$\Rightarrow \Delta ADM$ es equilátero

$\Rightarrow AM = MB = a$

- ΔAMB: isósceles

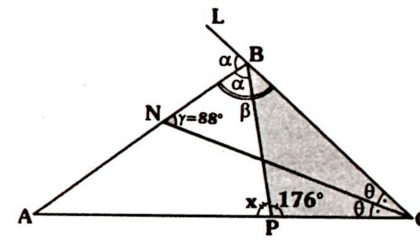
$\Rightarrow m\measuredangle MAB = m\measuredangle ABM = 52°$

- En ΔDMB: $x + 52° = 82°$

$\therefore \mathbf{x = 30°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 286



- Piden: x
- Dato: $\beta + \alpha = 180°$ y γ es el mayor entero par
- Como $\alpha + \beta = 180°$, al prolongar $\overline{CB}$, se cumple $m\measuredangle ABL = \alpha$, también tendremos $2\alpha < 180° \Rightarrow \alpha < 90°$
- En ΔBNC: $\gamma < \alpha \Rightarrow \gamma < \alpha < 90°$

$\Rightarrow \gamma < 90°$

- Como γ es mayor entero $\Rightarrow \gamma = 88°$

- En ΔBPC, por ángulo entre bisectrices:

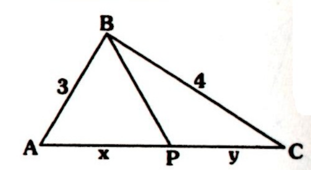
$$m\measuredangle BNC = \frac{m\measuredangle BPC}{2}$$

$\Rightarrow m\measuredangle BPC = 176°$

$\therefore \mathbf{x = 4°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 287



- Piden el mayor valor entero de: xy por existencia:

$x + y < 7$

- Por dato $x + y$ es mayor entero

$\Rightarrow x + y = 6$

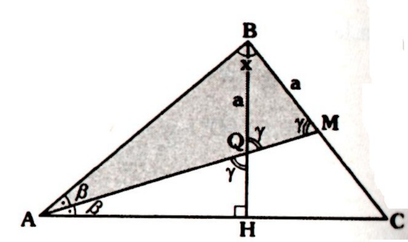
- Como $MG < MA$, para x e y:

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} \Rightarrow xy \le 9$$

- El mayor valor de xy, es **9**.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 288



- Piden: x

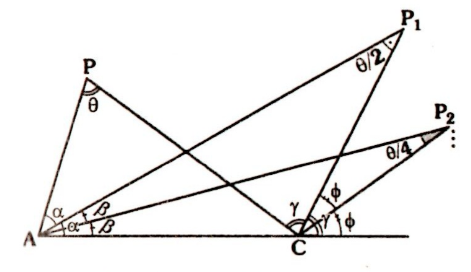
- En ΔABM: $x + \beta + \gamma = 180°$
- En $\triangle AHQ$: $\beta + \gamma = 90°$

$\Rightarrow x + 90° = 180°$

$\therefore \mathbf{x = 90°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 289



- Por ángulo entre bisectrices se tendrá:

En P_1, el ángulo mide: $\theta/2$

En P_2, el ángulo mide: $\theta/4$

En P_3, el ángulo mide: $\theta/8$

y así sucesivamente.

- Nos piden E:

Donde: $E = \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{4} + \frac{\theta}{8} + \ldots$

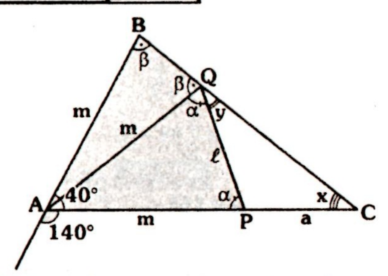
$$\Rightarrow E = \theta + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{4} + \ldots\right)}_{E}$$

$$\Rightarrow E = \theta + \frac{1}{2}E$$

$\therefore \mathbf{E = 2\theta}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 290



- Piden el mayor valor entero de x.
- Dato: $a > \ell$
- En ΔPQC: como $a > \ell \Rightarrow y > x$ ... (I)
- En $\square ABQP$: $\alpha + \beta = 140° + y$
- Pero:

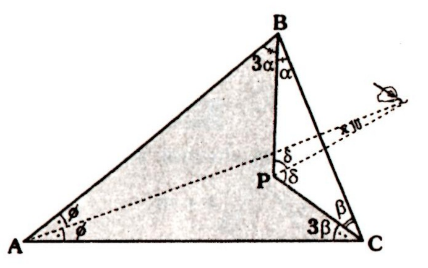
$\alpha + \beta + y = 180° \Rightarrow 140° + 2y = 180°$

$\Rightarrow y = 20°$

- En (I): $20° > x$
- Por lo tanto, el mayor valor entero es: **19°**.

Clave

RESOLUCIÓN Nº 291



- Piden: x
- Dato: $m\measuredangle ABC - m\measuredangle BCA = 40°$

$\Rightarrow 4\alpha - 4\beta = 40°$

$\Rightarrow \alpha - \beta = 10°$

- En la región sombreada, por teorema 30

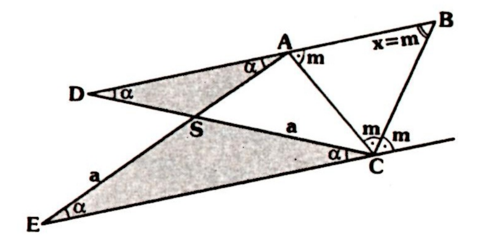
$$x = \frac{3\alpha - 3\beta}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\therefore \mathbf{x = 15°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 292



- Piden: x
- Dato: SE=SC y SD=SA

$\Rightarrow \Delta SEC$ y $\Rightarrow \Delta SDA$: isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle SEC = m\measuredangle SAD = \alpha$

$\Rightarrow \overline{DA} // \overline{BC}$

- Por ángulos alternos internos:

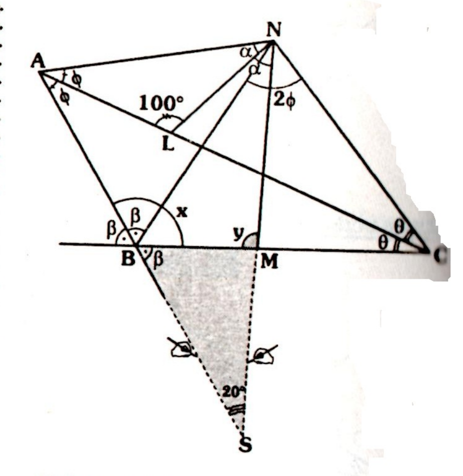
$$x = m$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ es equilátero

$$\therefore \mathbf{x = 60°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 293



- Piden: $x + y$
- Dato: $m\measuredangle BNC = 2(m\measuredangle NAC)$
- Por ángulo entre bisectrices, en ΔNBC

$$m\measuredangle BAC = \frac{m\measuredangle BNC}{2}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle BAC = \phi$$

- Se prolongan $\overline{AB}$ y $\overline{NM}$, en ΔSNA

$$m\measuredangle ALN = 90° + \frac{m\measuredangle BSM}{2}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle BSM = 20°$$

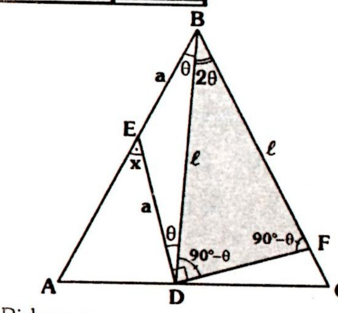
- En ΔBSM :

$$x + y = 180° + 20°$$

$$\therefore \mathbf{x + y = 200°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 294



- Piden: x
- Dato: EB = ED y DF = BD

$\Rightarrow \Delta EBD$ y $\Rightarrow \Delta DBF$: isósceles

- En ΔEBD : $x = 2\theta$
- En ΔDBF : $m\measuredangle BDF = m\measuredangle DFB = 90° - \theta$

$\Rightarrow m\measuredangle FBD = 2\theta$

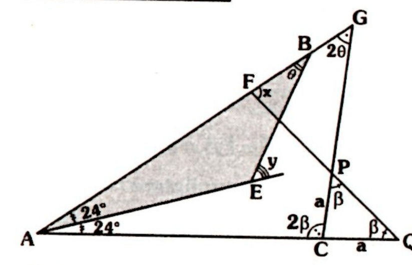
- Como ΔABC es equilátero

$\theta + 2\theta = 60° \Rightarrow \theta = 20°$

$$\therefore \mathbf{x = 40°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 295



- Piden: $x + y$
- Dato: CP = CQ
- En ΔABE : $y = 24° + \theta$
- En ΔAFQ : $x = 48° + \beta$

$\Rightarrow x + y = 72° + \theta + \beta$ ... (I)

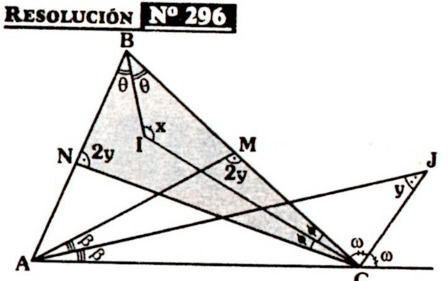
- En ΔAGC : $2\theta + 2\beta + 48° = 180°$

$\Rightarrow \theta + \beta = 66°$

$$\therefore \mathbf{x + y = 138°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 296



- Piden: $x - y$
- Dato: $m\measuredangle BNC = m\measuredangle AMC$
- En ΔAMC, por ángulo entre bisectrices

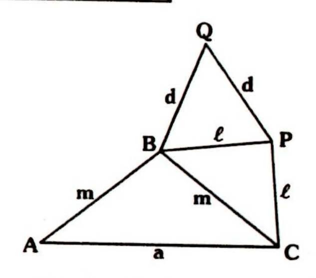
$$m\measuredangle AJC = \frac{m\measuredangle AMC}{2} \Rightarrow m\measuredangle AMC = 2y$$

- Del dato: $m\measuredangle BNC = 2y$
- En ΔNBC : $x = 90° + \frac{(2y)}{2}$

$$\therefore \mathbf{x - y = 90°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 297



- Nos piden la relación entre **a** y **d**.

En ΔABC: $a < 2m$ ... (I)

En ΔBPC: $m < 2\ell \Rightarrow 2m < 4\ell$ ... (II)

En ΔBQP: $\ell < 2d \Rightarrow 4\ell < 8d$ ... (III)

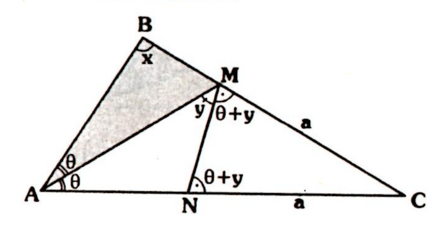
- De (I) y (II) y (III):

$$a < 2m < 4\ell < 8d$$

$$\therefore \mathbf{a < 8d}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 298



- Piden: $x - y$
- Dato: $x + y = 150°$ y $MC = CN$

$\Rightarrow \Delta MNC$ isósceles

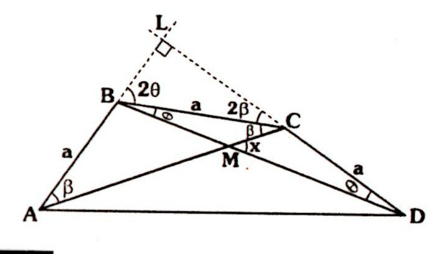
- En ΔABM: $x + \theta = \theta + 2y \Rightarrow x = 2y$
- Del dato: $2y + y = 150°$

$$y = 50° \wedge x = 100°$$

$$\therefore \mathbf{x - y = 50°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 299



- Piden: x
- Dato: $AB = BC = CD$

$\Rightarrow \Delta ABC$ y ΔBCD isósceles

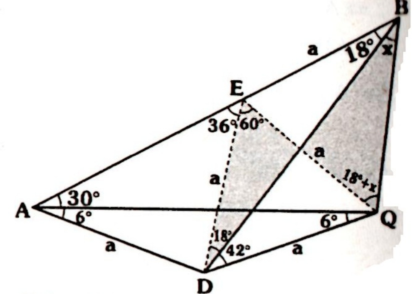
- En ΔBMC: $x = \theta + \beta$
- En $\triangle BLC$: $2\theta + 2\beta = 90°$

$$\Rightarrow \theta + \beta = 45°$$

$$\therefore \mathbf{x = 45°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 300



- Piden: x
- Al completar "ángulos" en ΔADB, se observa:

$$m\measuredangle DAB = 2(m\measuredangle ABD)$$

- Se traza $\overline{DE}$ tal que $m\measuredangle EDB = 18°$

$\Rightarrow AD = DE = EB = a$

$\Rightarrow \Delta DEQ$ es equilátero $\Rightarrow EQ = a$

$\Rightarrow \Delta EQB$ es isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle EQB = m\measuredangle EBQ = 18° + x$

- En la parte sombreada:

$$x + 18° + x = 18° + 60°$$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave D

Geometría

ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

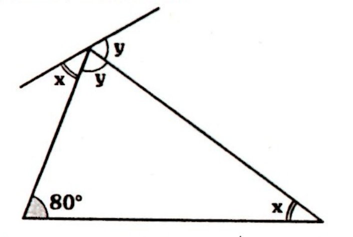
- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

TRIÁNGULOS



PROBLEMA Nº 1

Del gráfico, calcule x.



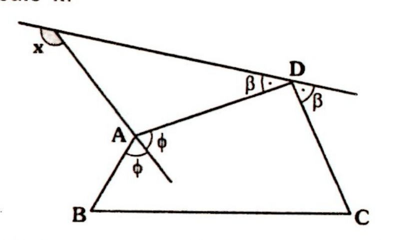
A) 20° B) 30° C) 40°
D) 25° E) 35°

PROBLEMA Nº 2

En el gráfico :

$m\measuredangle ABC + m\measuredangle BCD = 140°$

calcule x.



A) 110° B) 120° C) 140°
D) 160° E) 170°

PROBLEMA Nº 3

Se tiene un triángulo en el cuál dos de sus lados miden 3 y 6. Si el tercer lado tiene por longitud un número impar. Calcule el menor valor del perímetro.

A) 12 B) 13 C) 11
D) 14 E) 16

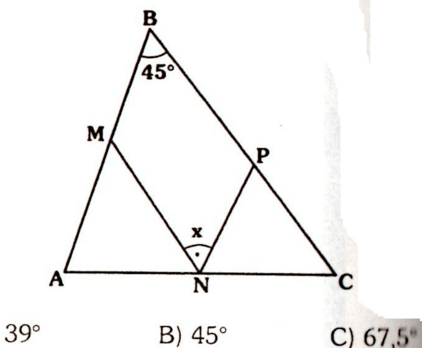
PROBLEMA Nº 4

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BD. Si AB=AD, BD=DC y $m\measuredangle ABC = 120°$. Calcule $m\measuredangle ACB$

A) 10° B) 12° C) 20°
D) 30° E) 40°

PROBLEMA Nº 5

En el gráfico, AM=AN y PC=NC. Calcule x



A) 39° B) 45° C) 67,5°
D) 36° E) 60°

PROBLEMA Nº 6

En el triángulo ABC se cumple:

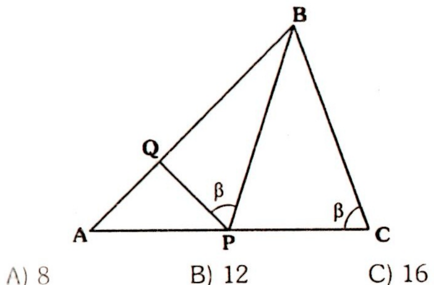
$AC = 2(AB)$ y $m\measuredangle ABC = 3(m\measuredangle BCA)$

Calcule $m\measuredangle BCA$

A) 30° B) 25° C) 60°
D) 40° E) 20°

PROBLEMA Nº 7

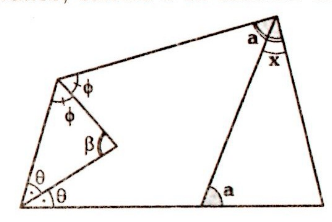
En el gráfico, AQ=QP, PB=BC y AB=16. Calcule AC



A) 8 B) 12 C) 16
D) $8\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 8

Del gráfico, calcule x en función de β .



A) 180° − β B) β
C) 180° − 2β D) 2β
E) 90° − β

PROBLEMA Nº 9

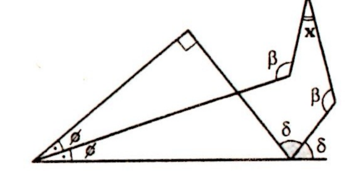
En el triángulo $ABC (AC = CB)$, se ubica P y Q en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si PB = QC. Calcule el menor valor entero de $m\measuredangle BPC$.

A) 48° B) 60° C) 46°
D) 59° E) 61°

PROBLEMA Nº 10

Del gráfico, calcule x

A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 22,5°
E) 32,5°



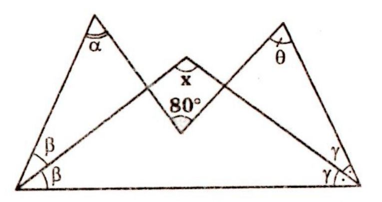
PROBLEMA Nº 11

En el triángulo MPN se traza la altura NQ, tal que $m\measuredangle MNQ = 20°$, $m\measuredangle NPM = 40°$ y NP=6. Calcule MP

A) 3 B) 4,5 C) 6
D) 7 E) 8

PROBLEMA Nº 12

En el gráfico, $\alpha + \theta = 140°$. Calcule x

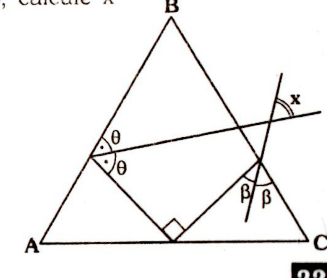


A) 60° B) 100° C) 80°
D) 110° E) 120°

PROBLEMA Nº 13

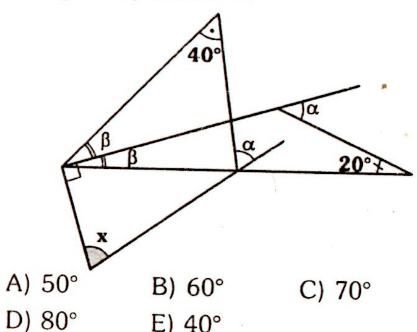
En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, calcule x

A) 30°
B) 80°
C) 60°
D) 45°
E) 75°



PROBLEMA Nº 14

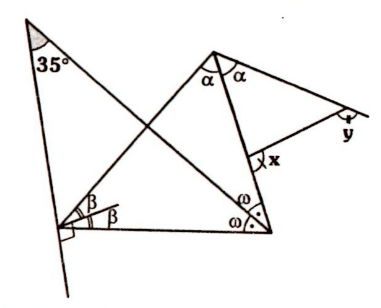
Del gráfico, calcule x.



A) 50° B) 60° C) 70°
D) 80° E) 40°

PROBLEMA Nº 15

Del gráfico, calcule $x+y$.



A) 220° B) 210° C) 250°
D) 200° E) 170°

PROBLEMA Nº 16

En el triángulo ABC se traza la bisectriz exterior BD (D en la prolongación de $\overline{AC}$) y en el triángulo CBD se traza la bisectriz interior CE. Si BE=6; calcule el menor valor entero de CD.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 17

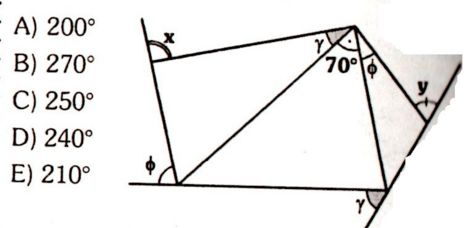
En el triángulo isósceles de base AC, se traza la bisectriz interior CQ. Si AQ=2, calcule el valor entero de CQ.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 18

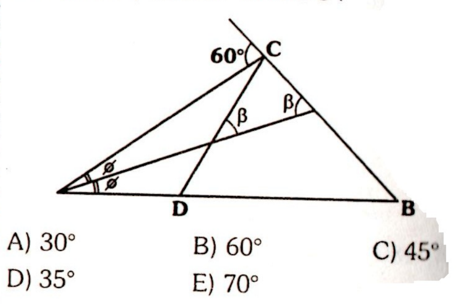
Del gráfico, calcule $x+y$

A) 200°
B) 270°
C) 250°
D) 240°
E) 210°



PROBLEMA Nº 19

Del gráfico, calcule m∢BDC.

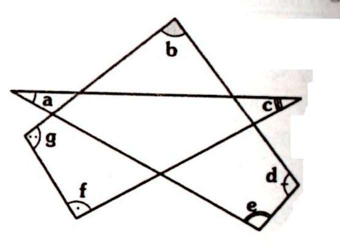


A) 30° B) 60° C) 45°
D) 35° E) 70°

PROBLEMA Nº 20

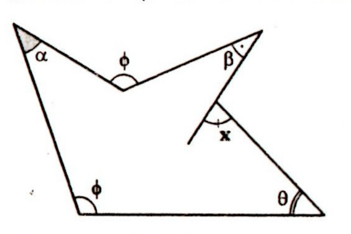
Del gráfico, calcule $a+b+c+d+e+f+g$

A) 180°
B) 360°
C) 540°
D) 720°
E) 900°



PROBLEMA Nº 21

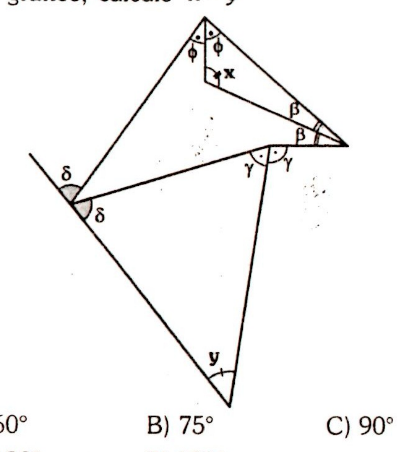
En el gráfico, $\alpha+\beta+\theta=80°$. Calcule x



A) 100° B) 80° C) 160°
D) 140° E) 120°

PROBLEMA Nº 22

Del gráfico, calcule $x-y$

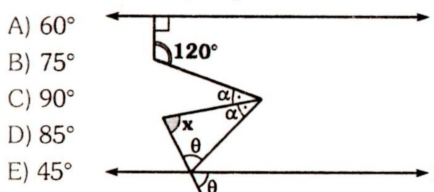


A) 60° B) 75° C) 90°
D) 180° E) 120°

PROBLEMA Nº 23

En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1}//\overleftrightarrow{L_2}$ calcule x

A) 60°
B) 75°
C) 90°
D) 85°
E) 45°



PROBLEMA Nº 24

En el triángulo ABC, se trazan la altura AH y la bisectriz interior $\overline{BE}$, las cuales se cortan en F. Si m∢BAC = 64° y m∢BCA = 42°. Calcule m∢AFB.

A) 107° B) 127° C) 132°
D) 143° E) 150°

PROBLEMA Nº 25

En el triángulo isósceles ABC(AB = BC), se ubican R y Q en las prolongaciones de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, se ubica P en $\overline{BQ}$. Si AP=PQ, BQ=AB+3 y $m\sphericalangle BRQ = 90° - \frac{m\sphericalangle BAP}{2}$

Calcule CR

A) 2 B) 5 C) 6
D) 4 E) 3

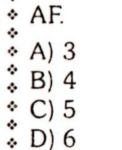
PROBLEMA Nº 26

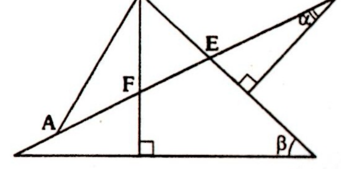
En el triángulo DBE se traza la bisec interior DC y en el triángulo DBC se traza la ceviana interior BA. Si AB=BC calcu le $\frac{m\sphericalangle ABD}{m\sphericalangle CED}$.

A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 5/2 E) 3/2

PROBLEMA Nº 27

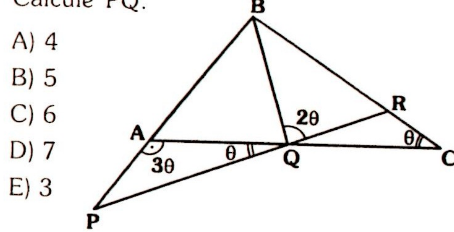
En el gráfico, AB=6, BE=2 y $\beta+2\alpha=90°$. Calcule el valor entero de AF.


A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 2



PROBLEMA Nº 28

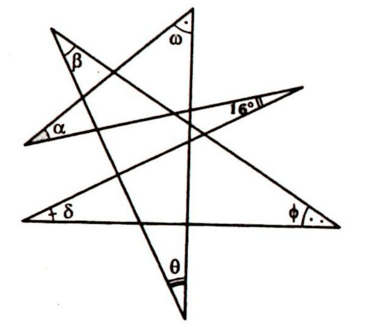
En el gráfico, $AP = 2$ y $BR - RC = 3$
Calcule PQ.



A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 3

PROBLEMA Nº 29

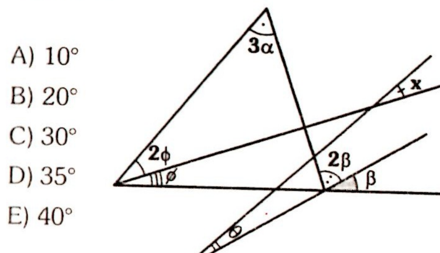
Calcule $\alpha+\beta+\theta+\delta+\phi+\omega$, en:



A) 360°
B) 180°
C) 320°
D) 196°
E) 240°

PROBLEMA Nº 30

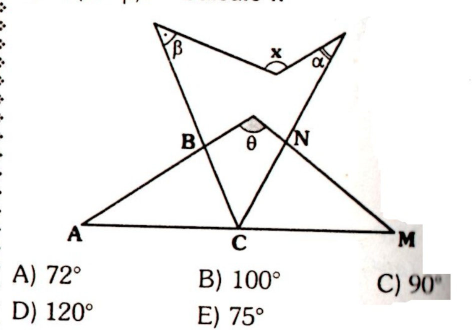
En el gráfico, $\theta+\alpha = 20°$.
Calcule x



A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 35°
E) 40°

PROBLEMA Nº 31

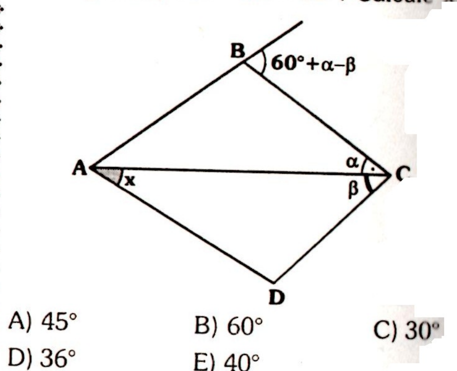
En el gráfico, $AB = AC$; $MC = MN$ y $\theta = 2(\alpha+\beta)$. Calcule x



A) 72°
B) 100°
C) 90°
D) 120°
E) 75°

PROBLEMA Nº 32

En el gráfico, $AB = BC = CD$. Calcule x



A) 45°
B) 60°
C) 30°
D) 36°
E) 40°

PROBLEMA Nº 33

En el triángulo ABD se ubica C en la región exterior relativa a $\overline{BD}$, E se encuentra en la prolongación de $\overline{AD}$.

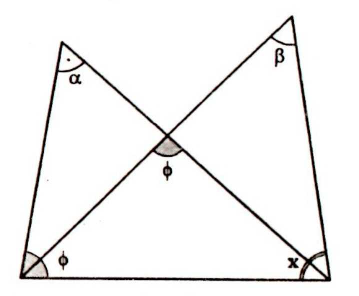
Si $AB = BD = BC$ y $m\sphericalangle ABC = 90°$.

Calcule $m\sphericalangle EDC$.

A) 50°
B) 45°
C) 56°
D) 40°
E) 60°

PROBLEMA Nº 34

En el gráfico, $\beta+\alpha = 100°$. Calcule x.



A) 80°
B) 100°
C) 110°
D) 160°
E) 120°

PROBLEMA Nº 35

En el triángulo ABC se traza por B una recta paralela a $\overline{AC}$, la cual es intersectada en P y Q por la bisectrices de los ángulos BAC y ECB en P y Q respectivamente (E en la prolongación de $\overline{AC}$). Si $AB=4$ y $BC=5$. Calcule PQ.

A) 3
B) 2
C) 1
D) 5
E) 4

PROBLEMA Nº 36

Se tiene la región triangular ABC de perímetro 16, por A se trazan rectas paralelas a las bisectrices interiores (trazadas desde B y C), intersecando a $\overline{BC}$ en M y N. Calcule MN.

A) 12
B) 20
C) 9
D) 16
E) 8

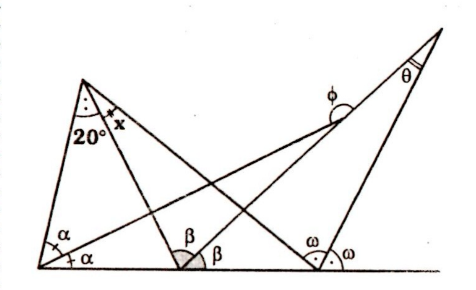
PROBLEMA Nº 37

En el gráfico, $\alpha+\beta+\theta+\omega = 150°$
Calcule x.

A) 130°
B) 140°
C) 150°
D) 110°
E) 120°

PROBLEMA Nº 38

En el gráfico, $\phi+\theta = 180°$, Calcule x.



A) 18°
B) 40°
C) 10°
D) 20°
E) 15°

PROBLEMA Nº 39

En el triángulo ABC, se cumple:

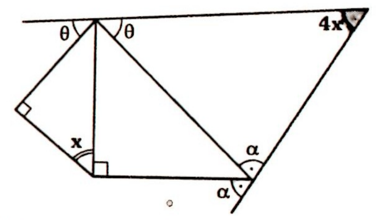
$m\sphericalangle BAC = 40°$ y $m\sphericalangle ABC = 60°$

se traza la ceviana interior BD, de modo que $AB = BC + CD$. Calcule $m\sphericalangle BDC$.

A) 50°
B) 75°
C) 80°
D) 60°
E) 70°

PROBLEMA Nº 40

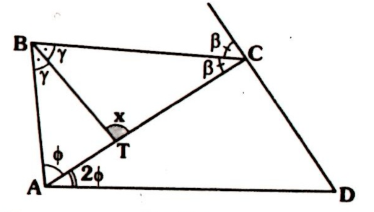
Del gráfico, calcule x.



A) 30° B) 10° C) 20°
D) 50° E) 40°

PROBLEMA Nº 41

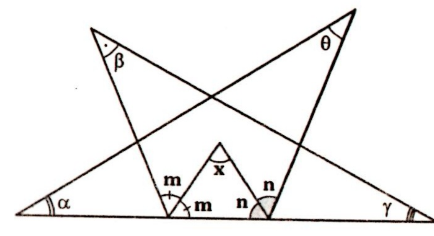
En el gráfico, $2(m\sphericalangle BTA)=5(m\sphericalangle CDA)$, calcule x.



A) 70° B) 80° C) 100°
D) 110° E) 120°

PROBLEMA Nº 42

Si $\alpha+\beta+\theta+\gamma=140°$, calcule x.



A) 140° B) 100° C) 80°
D) 70° E) 60°

PROBLEMA Nº 43

En el triángulo ABC, se ubican en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican P, Q y R respectivamente. Si $\overline{PQ}//\overline{AC}$, $\overline{AQ}\cap\overline{PR}=\{S\}$, AS=AR y AQ=10. Calcule PQ+AR.

A) 8 B) 7,5 C) 5
D) 10 E) 12,5

PROBLEMA Nº 44

Del gráfico, calcule x + y.

A) 45° B) 90° C) 180°
D) 270° E) 135°

PROBLEMA Nº 45

En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la altura BH y en el triángulo HBC se traza la ceviana interior BD, tal que $m\sphericalangle BAC=2(m\sphericalangle HBD)$, AB=8 y BC=15. Calcule CD

A) 8 B) 9 C) 10
D) 7 E) 6

PROBLEMA Nº 46

En un triángulo se cumple que las medidas de los ángulos exteriores están en progresión aritmética. Si el menor ángulo interior mide 30°. Calcule la medida del mayor ángulo interior?

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 120° E) 70°

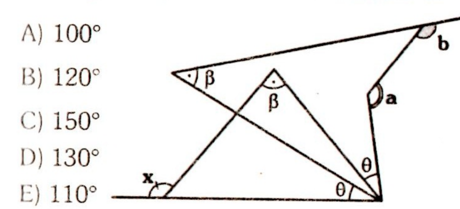
PROBLEMA Nº 47

En el triángulo ABC, se ubican los puntos D, F y E en $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. En los triángulos AFD y FEC se trazan las bisectrices interiores $\overline{FN}$ y $\overline{FQ}$ respectivamente. Si $m\sphericalangle ABC=40°$, AD=DF y FE=EC. Calcule $m\sphericalangle NFQ$.

A) 100° B) 105° C) 110°
D) 120° E) 140°

PROBLEMA Nº 48

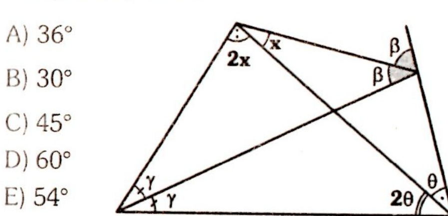
En el gráfico, $a+b=300°$. Calcule x.



A) 100°
B) 120°
C) 150°
D) 130°
E) 110°

PROBLEMA Nº 49

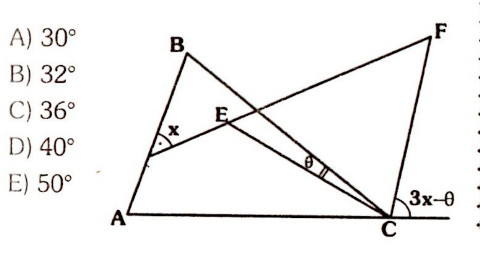
Del gráfico, calcule x.



A) 36°
B) 30°
C) 45°
D) 60°
E) 54°

PROBLEMA Nº 50

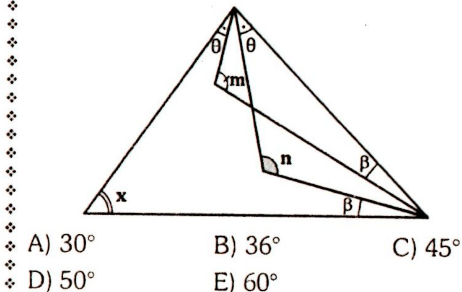
En el gráfico, AC=BC y CE=CF, calcule x



A) 30°
B) 32°
C) 36°
D) 40°
E) 50°

PROBLEMA Nº 51

En el gráfico, m+n=6x. Calcule x



A) 30° B) 36° C) 45°
D) 50° E) 60°

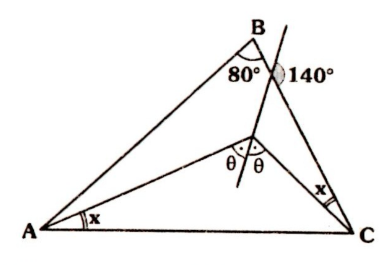
PROBLEMA Nº 52

En el triángulo ABC, se ubican en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ los puntos P y Q respectivamente. Si AB = AP = PQ = QC y $m\sphericalangle BAC=60°$, calcule $m\sphericalangle QPC$.

A) 10° B) 20° C) 15°
D) 18° E) 22°

PROBLEMA Nº 53

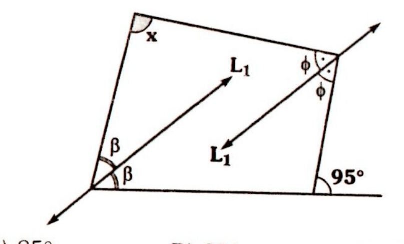
En el gráfico, AB=AC, calcule x.



A) 10° B) 18° C) 15°
D) 12° E) 20°

PROBLEMA Nº 54

En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1}//\overleftrightarrow{L_2}$, calcule x.



A) 85° B) 95° C) 105°
D) 110° E) 125°

PROBLEMA Nº 55

En el triángulo ABC, se traza la altura BH y la bisectriz interior BD.

Si $m\measuredangle BAC - m\measuredangle BCA = 44°$.

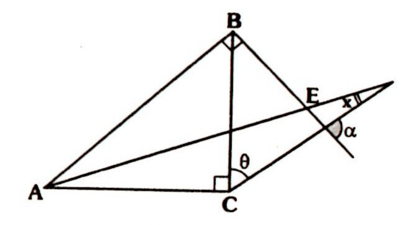
Calcule $m\measuredangle HBD$.

A) 22° B) 30° C) 56°
D) 38° E) 44°

PROBLEMA Nº 56

En el gráfico calcule x.

Si $m\measuredangle BAE = m\measuredangle EAC$



A) $2\alpha+\theta$ B) $\dfrac{2\alpha-\theta}{2}$ C) $\alpha+2\theta$

D) $\dfrac{\alpha-\theta}{2}$ E) $\dfrac{\alpha+\theta}{2}$

PROBLEMA Nº 57

En el triángulo ABC se ubica P en la región interior, el perímetro de la región ABC es 10 y AC toma su mayor valor entero. Calcule el valor entero de $PA+PC$.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 58

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores BE y $BD(E \in \overline{AD})$.

Si AB=AD, BC=EC y

$$\frac{m\measuredangle EBD}{3} = \frac{m\measuredangle DBC}{2} = m\measuredangle ABE$$

Calcule $m\measuredangle EBA$

A) 15° B) 20° C) 30°
D) 12° E) 18°

PROBLEMA Nº 59

Se tiene el triángulo escaleno ABC, tal que AC=4 y BC=7. ¿Cuántos valores enteros puede tener AB?

A) 7 B) 5 C) 4
D) 6 E) 8

PROBLEMA Nº 60

En un triángulo ABC se ubica R y S en $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, si AB=BR, CB=CS, $m\measuredangle ABR=\gamma$ y $m\measuredangle ACS=\alpha$. Indique la alternativa correcta.

A) $\gamma=2\alpha$ B) $\gamma>\alpha$ C) $\alpha=2\gamma$

D) $\gamma<\alpha$ E) $\gamma>\dfrac{\alpha}{2}$

Problemas Propuestos

Ciclo Cepre-Uni

PROBLEMA Nº 61 SEMINARIO 2007-II

En un triángulo ABC se cumple que $m\measuredangle A = 3m\measuredangle C$; AB=3u y el ángulo ABC es obtuso. Calcule la longitud entera de $\overline{BC}$.

A) 7 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

PROBLEMA Nº 62 SEMINARIO 2007-II

En un triángulo ABC equilátero se ubica el punto D exterior al triángulo, de manera que $\overline{BD}$ interseca a $\overline{AC}$. Si el ángulo ADC es obtuso, AD=7 y DC=13, entonces el mayor perímetro entero del triángulo ABC es:

A) 55 B) 56 C) 57
D) 58 E) 59

PROBLEMA Nº 63 SEMINARIO 2006-II

En la figura mostrada se verifica que:

$$m\measuredangle BAD + m\measuredangle BCD = 60°.$$

La medida del ángulo agudo que forman $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ es:

A) 20°
B) 40°
C) 60°
D) 80°
E) 100°

PROBLEMA Nº 64 SEMINARIO 2006-II

En el lado BC de un triángulo ABC se ubica el punto D y se une con el vértice A.

Si: $2(m\measuredangle CDA) = m\measuredangle BAC + m\measuredangle ABC$ y CD=6u

entonces la longitud de $\overline{AC}$ (en u) es:

A) 6 B) 4 C) 8
D) 5 E) 7

PROBLEMA Nº 65 SEMINARIO 2006-II

En un triángulo ABC, la bisectriz exterior del ángulo A interseca al rayo BD en el punto D.

Si: $m\measuredangle DBC = 2(m\measuredangle ABD)$,

$m\measuredangle BCA = m\measuredangle DCA$ y $m\measuredangle BDC = 80°$

entonces la $m\measuredangle BDA$ es:

A) 22° B) 23° C) 24°
D) 25° E) 27°

PROBLEMA Nº 66 SEMINARIO 2006-II

En un triángulo isósceles ABC(AB=BC) se traza la bisectriz interior AD $(D \in \overline{BC})$. Si CD=8u, entonces la mayor longitud entera de $\overline{AD}$ (en u es):

A) 14 B) 15 C) 16
D) 18 E) 20

PROBLEMA Nº 67 SEMINARIO 2006-II

En un triángulo ABC sus lados miden:

$AB=2x-1$, $BC=6-x$ y $AC=3x-1$

Si x es un número entero positivo, entonces el triángulo es:

A) Isósceles B) Acutángulo
C) equilátero D) Obtusángulo
E) Rectángulo

PROBLEMA Nº 68 SEMINARIO 2006-II

Los lados de un triángulo escaleno miden 4μ, 3μ y $\sqrt{x^2-3}$. Si $x>0$, ¿Cuántos valores enteros x existen?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 69 SEMINARIO 2006-II

En un triángulo rectángulo ABC se traza la altura BH, en el triángulo BHC se traza la ceviana interior HQ y en el triángulo AHB se traza la bisectriz interior BM. Las prolongaciones de $\overline{BM}$ y $\overline{QH}$ se intersecan en P. Si $PM=5cm$, $HC=15cm$, $m\measuredangle A=72°$ y $m\measuredangle BPQ=40,5°$; entonces la longitud de $\overline{BC}$ (en cm) es:

A) 10 B) 15 C) 20
D) 25 E) 30

PROBLEMA Nº 70 1ra P.C. 2004-I

En un triángulo ABC recto en B, se traza la altura BH. La bisectriz del ángulo ABH interseca a $\overline{AC}$ en el punto M. Si $AC=18u$ y $BC=15u$, entonces la longitud (en u) del segmento AM es:

A) 1,5 B) 2 C) 2,5
D) 4 E) 3

PROBLEMA Nº 71 1ra P.C 2004-I

En un triángulo ABC se trazan la bisectriz interior del ángulo A y la bisectriz exterior del ángulo C, las cuales se intersecan en el punto E.

Si : $m\measuredangle BAC=40°$ y $m\measuredangle AEC=45°$ entonces la medida del ángulo agudo que forman las rectas BC y AE es:

A) 60° B) 70° C) 75°
D) 80° E) 85°

PROBLEMA Nº 72 1er P.C. 2005-I

En un triángulo ABC isósceles, $m\measuredangle ABC=100°$, se trazan las cevianas $\overline{BP}$ y $\overline{AQ}$ ($P\in\overline{AC}$ y $Q\in\overline{BC}$) tal que:

$$m\measuredangle PBC=m\measuredangle BAQ=30°$$

Entonces la $m\measuredangle BPQ$ es:

A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 70°

PROBLEMA Nº 73 1ra C.P 2005-II

Dado un triángulo, donde sus ángulos interiores miden $(x+7)$, $(x-7)$ y $(2y-x)$ ¿cuál es el menor valor entero que puede tomar y?

A) 44° B) 46° C) 48°
D) 50° E) 51°

PROBLEMA Nº 74 1ra PC 2006-I

Se tiene el triángulo ABC, las bisectrices interiores trazadas donde A y C se cortan en I. Si $AI=6u$, $CI=2u$ y AC es un número entero. Calcule AC (en u)

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

PROBLEMA Nº 75 1ra PC 2006-I

En un triángulo ABC, se trazan la mediana AM y la altura BH. Si $m\measuredangle ABH=45°$ y $m\measuredangle BCA=30°$.

Halle $m\measuredangle AMH$.

A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 76 1ra PC 2006-II

Se tiene el triángulo ABC, $P\in\overline{AC}$, $Q\in\overline{BC}$, $AB=BP=PQ=QC$. Calcule el mayor valor entero que puede tomar la medida del ángulo BCA.

A) 28° B) 29° C) 30°
D) 31° E) 32°

PROBLEMA Nº 77 1ra PC. 2006-II

Se tiene el triángulo ABC, $P\in\overline{AB}$, $Q\in\overline{BC}$ y $R\in\overline{QC}$. Si $m\measuredangle BCP=30°$ $m\measuredangle BAQ=m\measuredangle CAR=20°$; $m\measuredangle QAR=40°$ y $m\measuredangle PCA=50°$

Calcule $m\measuredangle PQA$.

A) 25° B) 30° C) 35°
D) 40° E) 45°

PROBLEMA Nº 78 1ra P.C 2007-I

Se tiene el triángulo ABC, en $\overline{BC}$ se ubica P, en $\overline{PC}$ se ubica Q y en $\overline{AC}$ se ubica R, $m\measuredangle PAQ=m\measuredangle RPQ=30°$, $m\measuredangle BAP=20°$, $m\measuredangle QAC=10°$ y $m\measuredangle APR=70°$.

Calcule $m\measuredangle AQR$

A) 15° B) 20° C) 25°
D) 30° E) 35°

PROBLEMA Nº 79 1er EXÁMEN PARCIAL 2002-I

En un triángulo escaleno ABC, las bisectrices interiores trazadas desde A y C se intersecan en I. Si $AI=3$ e $IC=4$. Halle la longitud de $\overline{AC}$ si se sabe que es un número entero.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 80 1er EXAMEN PARCIAL 2005-I

En un triángulo escaleno ABC, donde $AB<BC$, se traza la bisectriz interior BD, entonces podemos afirmar que:

A) $m\measuredangle A-m\measuredangle C=m\measuredangle BDA-m\measuredangle BDC$
B) $m\measuredangle A+m\measuredangle C=m\measuredangle BDC+m\measuredangle BDA$
C) $m\measuredangle A+m\measuredangle C=m\measuredangle BDC-m\measuredangle BDA$
D) $m\measuredangle A-m\measuredangle C=m\measuredangle BDC+m\measuredangle BDA$
E) $m\measuredangle A-m\measuredangle C=m\measuredangle BDC-m\measuredangle BDA$

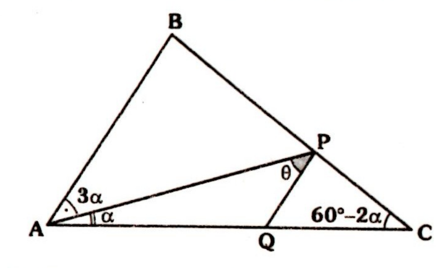
PROBLEMA Nº 81 Texto CEPRE-UNI 2004

Dado un triángulo ABC y un punto P exterior tal que $\overline{PC}\cap AB\neq\phi$. Si $PA=5u$; $PB=4u$ y $BC+AC=11u$. Calcule el máximo valor entero de la longitud de $\overline{PC}$ (en u).

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

PROBLEMA Nº 82 TEXTO CEPRE UNI 2004

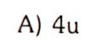
En el gráfico, $AB=AQ$, calcule θ



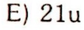
A) 15° B) 30° C) 45°
D) $30°-\alpha$ E) $15°+\alpha$

PROBLEMA Nº 83 TEXTO CEPRE UNI 2004

En la figura $MQ = 12u$; $PN = 16u$ y $MN = 8u$. Halle el mayor valor entero de PQ.



A) 4u
B) 11u
C) 15u
D) 19 u
E) 21u



PROBLEMA Nº 84 TEXTO CEPRE UNI 2004

En un triángulo ABC; AB=3u y BC=10u, siendo AFC un triángulo equilátero. Calcule el mayor valor entero del perímetro del triángulo AFC.

A) 22u B) 24u C) 36u
D) 39u E) 38u

PROBLEMA Nº 85 1er SEMINARIO 99-I

En un triángulo ABC, $m\sphericalangle B = 60°$, $P \in \overline{BC}$; $Q \in \overline{AC}$ y $PB = AQ = AB$ y $m\sphericalangle QAB = m\sphericalangle AQP$. Calcule $m\sphericalangle QPC$.

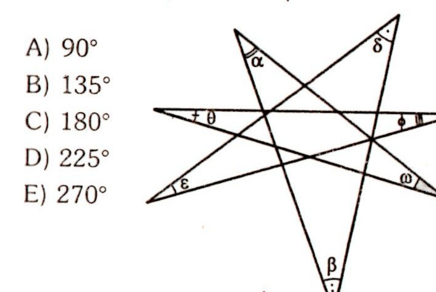
A) 40° B) 50° C) 60°
D) 45° E) 35°

PROBLEMA Nº 86 1er SEMINARIO 99-I

En la figura, calcule :

$$\alpha + \beta + \delta + \varepsilon + \phi + \theta + \omega$$

A) 90°
B) 135°
C) 180°
D) 225°
E) 270°



PROBLEMA Nº 87 1er SEMINARIO 99-I

ABC es un triángulo, E es un punto exterior relativo a $\overline{AC}$, tal que AE=8m ;

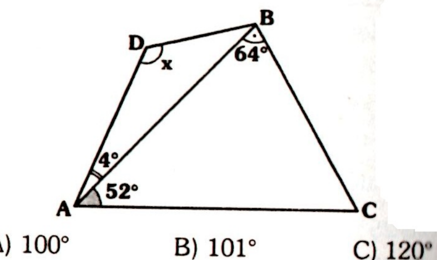
$$m\sphericalangle AEB = m\sphericalangle BEC \ ;$$
$$m\sphericalangle EBC = m\sphericalangle BCA - m\sphericalangle BEC \quad y$$
$$m\sphericalangle BCA + m\sphericalangle BEC = 90°$$

Calcule AB en metros.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

PROBLEMA Nº 88 1er SEMINARIO 99-I

En la figura $AD = BC$, calcule x



A) 100° B) 101° C) 120°
D) 121° E) 150°

PROBLEMA Nº 89 1er SEMINARIO 99-I

Dado el triángulo rectángulo ABC, $P \in \overline{AC}$, $AP < PC$, $AC = 2(BP)$ y $m\sphericalangle ABP = \theta$. Calcule $m\sphericalangle C$

A) $30° + \frac{\theta}{3}$ B) $30° + \frac{\theta}{2}$
C) $30° - \frac{\theta}{2}$ D) $45° + \frac{\theta}{3}$
E) $45° - \frac{\theta}{2}$

PROBLEMA Nº 90 1er SEMINARIO 98-II

En el gráfico ¿cuál de las siguientes relaciones es correcta?

A) $x + z = a + b$
B) $y + z = a + b$
C) $m + x = \omega + n$
D) $x + z + n = \omega + c + m$
E) $x + y + n = a + b + m$

PROBLEMA Nº 91 1er SEMINARIO 98-II

En un triángulo rectángulo ABC ($m\sphericalangle B = 90°$) sobre $\overline{AC}$ se toma un punto D ($AD < DC$) . Si $AC = 10$; $BD = 5$ y $m\sphericalangle C = 38°$. Calcule $m\sphericalangle ABD$.

A) 10° B) 14° C) 16°
D) 20° E) 24°

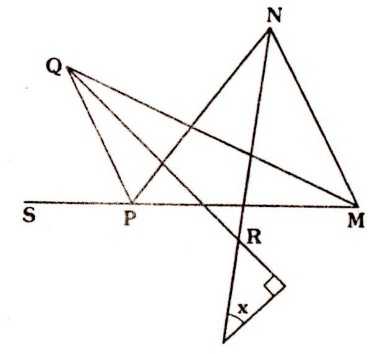
PROBLEMA Nº 92 1er SEMINARIO 98-II

En un triángulo ABC, AB=k y BC=k+5, por B se traza una paralela a $\overline{AC}$ que corta a la bisectriz interior de A en P y a la bisectriz exterior de C en Q. Calcule PQ.

A) 10 B) $\frac{5}{2}$ C) 5
D) $\frac{k}{2}$ E) $\frac{(2+k)}{2}$

PROBLEMA Nº 93 1er SEMINARIO 98-II

En el gráfico, $2(m\sphericalangle NMP) + m\sphericalangle MNP = \phi$. Si $\overline{MQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{NR}$ y $\overline{PQ}$ son bisectrices de los ángulos NMP, PQM , MNP y SPN respectivamente. Calcule x.



A) $90° - \frac{\phi}{4}$ B) $90° - \frac{\phi}{3}$ C) $90° - \frac{\phi}{2}$
D) $90° - \phi$ E) $90° - \frac{\phi}{5}$

PROBLEMA Nº 94 1er SEMINARIO 98-I

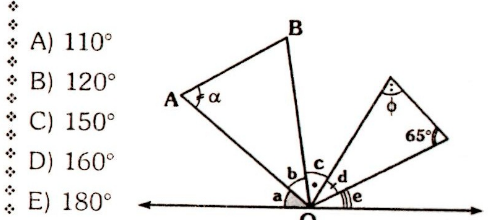
En un triángulo ABC acutángulo, la medida del ángulo interior en A excede en 28° al ángulo interior en B. Calcule la medida del ángulo entre la bisectriz exterior en C y la altura CH.

A) 98° B) 100° C) 102°
D) 104° E) 106°

PROBLEMA Nº 95 1er SEMINARIO 98-I

En el gráfico a, b, c, d y e son números pares consecutivos en orden creciente. Si OA=OB, calcule $\alpha + \phi$.

A) 110°
B) 120°
C) 150°
D) 160°
E) 180°



PROBLEMA Nº 96 1er SEMINARIO 98-I

En un triángulo ABC, obtuso en B se cumple que $m\sphericalangle A = 2(m\sphericalangle C)$ y AB=4u. Calcule el valor entero de BC.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 97 1er SEMINARIO 97-I

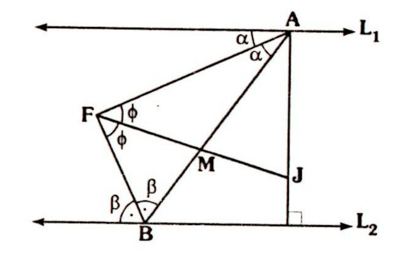
En un triángulo isósceles ABC(AB = BC), se construye exteriormente el triángulo BCD (BD = 4 y CD = 3).

Si BC > AC > CD y el ángulo CDB es obtuso. Si las longitudes de los lados del triángulo ABC son números enteros. Calcule el máximo valor entero del perímetro de ABDC.

A) 16 B) 15 C) 17
D) 18 E) 14

PROBLEMA Nº 98 1er SEMINARIO 97-I

En el gráfico $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, AM=a y BM=b, calcule AJ.



A) a − b B) $\frac{(a+b)}{2}$ C) a
D) $a + \frac{b}{2}$ E) $\frac{2}{3}(a+b)$

PROBLEMA Nº 99 1er SEMINARIO 97-I

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{BD}$ y $\overline{CF}$ luego se trazan los rayos $\overrightarrow{FP}$ y $\overrightarrow{DP}$, tal que:

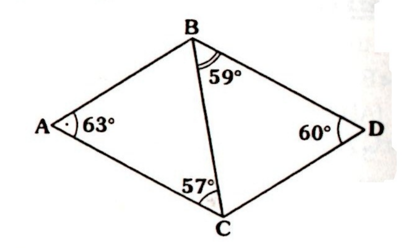
$$\frac{m\sphericalangle BFP}{m\sphericalangle PFC} = \frac{3}{2} \quad y \quad \frac{m\sphericalangle CDP}{m\sphericalangle PDB} = \frac{3}{2}$$

Si: $m\sphericalangle BAC = \theta$. Calcule: $m\sphericalangle FPD$

A) $60° - \frac{\theta}{10}$ B) $54° - \frac{\theta}{10}$
C) $36° - \frac{\theta}{10}$ D) $18° - \frac{2}{5}\theta$
E) $90° - \frac{\theta}{10}$

PROBLEMA Nº 100 1er SEMINARIO 97-I

Del gráfico, indique que segmento tiene mayor longitud.

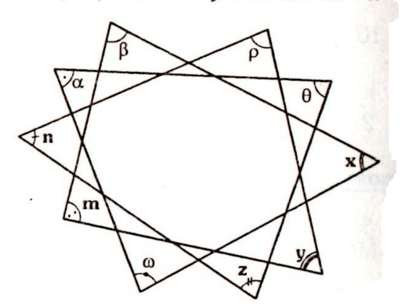


A) $\overline{BC}$ B) $\overline{BD}$ C) $\overline{CD}$
D) $\overline{AB}$ E) $\overline{AC}$

PROBLEMA Nº 101 1er SEMINARIO 97-I

Del gráfico, calcule:

$$\alpha + \beta + \rho + \theta + x + y + z + \omega + m + n$$



A) 180° B) 360° C) 270°
D) 540° E) 720°

PROBLEMA Nº 102 1er SEMINARIO 97-I

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{AF}$ y BD, por D se traza una paralela a $\overline{AB}$ que corta a $\overline{FC}$ en H y a $\overline{AF}$ en E. Si BH=8 y AD=10. Calcule EH.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 103 1er SEMINARIO 2003-II

En un triángulo ABC, se cumple $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle BCA)$; se traza la bisectriz interior AM tal que AC = AB + MC.

Calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) $\frac{180°}{7}$ B) $\frac{90°}{7}$ C) $\frac{150°}{7}$
D) $\frac{270°}{7}$ E) $\frac{360°}{7}$

PROBLEMA Nº 104 1er SEMINARIO 2003-II

En la recta que contiene al vértice C de un triángulo equilátero ABC se ubican los puntos D y E tal que estos son exteriores a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $m\sphericalangle BCE - m\sphericalangle DAC = 60°$ y AD=CE. Entonces la medida del ángulo BED, es:

A) 45° B) 90° C) 60°
D) 120° E) 30°

PROBLEMA Nº 105 1er SEMINARIO 2001-II

En un triángulo isósceles ABC(AB = BC), la bisectriz exterior del ángulo C y la bisectriz interior del ángulo A, se cortan en E, si AB=10, halle el mayor valor entero que puede tomar AE.

A) 18 B) 19 C) 20
D) 17 E) 16

PROBLEMA Nº 106 1er SEMINARIO 2001-II

En un triángulo rectángulo ABC, se traza la altura BH; las bisectrices de los ángulos ABH y HBC intersecan a $\overline{AC}$ en los puntos M y N respectivamente. Si AB=8 y BC=15, calcule MN.

A) 2 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 107 1er SEMINARIO 2001-II

En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior desde C y la bisectriz exterior desde A, intersecandose en el punto M, por donde se traza una paralela a $\overline{AC}$ intersecando a la bisectriz interior desde A en el punto N y a los lados AB y BC en los puntos P y Q respectivamente. Si AP=5 y QC=7. Halle MN.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

PROBLEMA Nº 108 1er SEMINARIO 2001-II

¿Cuántos triángulos existen de lados enteros y perímetro 26u?

A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 10

PROBLEMA Nº 109 1er SEMINARIO 2001-II

En el triángulo ABC(BA = AC), se trazan la altura AD y la ceviana $CM(M \in \overline{AB})$ tal que $m\sphericalangle DAC = \alpha$, $m\sphericalangle BCM = 2\alpha$. Se ubica N en $\overline{AD}$ tal que CN = BC. Halle $m\sphericalangle MCN$.

A) $90° - 3\alpha$ B) $45° - 3\alpha$
C) $60° - 2\alpha$ D) $60° - 3\alpha$
E) $75° - 2\alpha$

PROBLEMA Nº 110 1er SEMINARIO 2001-II

En un triángulo rectángulo ABC, sobre la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica D y por dicho punto se traza una recta secante que interseca a $\overline{AC}$ en E y a $\overline{AB}$ en F. Si AF=FE=ED y BC=CE. Halle m∢ECD

A) 110° B) 108° C) 112°
D) 116° E) 120°

PROBLEMA Nº 111 1er SEMINARIO 2001-I

En un triángulo ABC(m∢B = 110°), las bisectrices de los ángulos exteriores determinados en A y C se intersecan, con $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$ en P y Q respectivamente. Calcule la medida del ángulo agudo determinado por las bisectrices de los ángulos APB y CQB.

A) 75° B) 55° C) 82°30'
D) 72°30' E) 70°

PROBLEMA Nº 112 1er SEMINARIO 2001-I

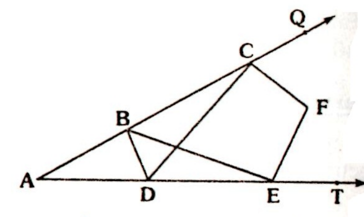
En un triángulo ABC se ubica M punto interior tal que AC=BM; m∢MAC = 48°; m∢MCA = 18° y m∢AMB = 120°.

Calcule m∢MCB.

A) 18° B) 20° C) 24°
D) 30° E) 22°

PROBLEMA Nº 113 1er SEMINARIO 2001-I

En el gráfico $\overline{DC}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ y $\overline{EF}$ son bisectrices de los ángulos BDE, DBC, DCQ y BET respectivamente. Si m∢CAE = θ, calcule m∢CFE.



A) $180° - \frac{\theta}{4}$ B) $90° + \frac{\theta}{4}$
C) $135° - \frac{\theta}{4}$ D) $125° - \frac{\theta}{4}$
E) $150° - \frac{\theta}{4}$

PROBLEMA Nº 114 1er SEMINARIO 2001-I

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{AD}$ y BE, por D se traza una paralela a $\overline{AB}$ que interseca a la prolongación de $\overline{BE}$ en F y a $\overline{AC}$ en G. Si AG = m y BD=n (n > m). Halle FG

A) n − m B) $\frac{m+n}{2}$ C) 2m − n
D) $\frac{2m+n}{3}$ E) $\frac{2n-m}{3}$

PROBLEMA Nº 115 1er SEMINARIO 2001-I

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores AD y BE. Si m∢ACB = θ. Calcule la medida del ángulo entre las bisectrices de los ángulos ADC y BEC.

A) $45° + \frac{\theta}{4}$ B) $45° - \frac{\theta}{4}$ C) $60° - \frac{\theta}{4}$
D) $35° - \frac{\theta}{4}$ E) $35° + \frac{\theta}{4}$

PROBLEMA Nº 116 1er SEMINARIO 2001-I

En el interior de un triángulo rectángulo

ABC (recto en B) se ubica Q, tal que:

$\overline{AQ} \cap \overline{BC} = \{E\}$; $\overline{CQ} \cap \overline{AB} = \{F\}$

Si AQ + QC = 10 y QE + QF = 4. ¿Cuántos valores enteros tiene AC?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 117 1er SEMINARIO 2001-I

Dado un triángulo ABC, en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se ubican P y Q de tal modo que:

AP = PQ = QC , BC = BQ y

m∢ACB = 2(m∢BAC).

Halle m∢PQB

A) 30° B) 60° C) 36°
D) 72° E) 45°

PROBLEMA Nº 118 1er SEMINARIO 2001-I

En un triánguo ABC, donde:

m∢BAC = 2(m∢ACB)

Se traza la bisectriz interior BD, si 2(BC) = 5(AD) = 10a. Calcule AB.

A) 2a B) $\frac{3}{2}$a C) 3a
D) $\frac{5}{2}$a E) $\frac{8}{3}$a

PROBLEMA Nº 119 1er SEMINARIO 99-II

En un triángulo obtusángulo ABC se traza la ceviana interior BD. Si AB = AD = BC, calcule el menor valor entero de m∢DBC

A) 40° B) 42° C) 44°
D) 23° E) 45°

PROBLEMA Nº 120 1er SEMINARIO 2005-II

En el gráfico a + 2b = 100°, calcule x.

A) 140°
B) 130°
C) 110°
D) 120°
E) 135°

PROBLEMA Nº 121 1er SEMINARIO 2005-II

En un triángulo ABD se trazan las cevianas interiores AE y BC, tal que AB=BE=AC; CE=ED y m∢BAC=60°. Calcule m∢EAC.

A) 8° B) 12° C) 9°
D) 10° E) 15°

PROBLEMA Nº 122 1er SEMINARIO 2005-II

En un triángulo rectángulo ABC isósceles (m∢B = 90°), en su interior se ubica Q, tal que m∢BAQ = 2x ; m∢ACQ = x y m∢QBC = 3x. Calcule x

A) 10° B) 18° C) 12°
D) 15° E) 20°

PROBLEMA Nº 123 1er SEMINARIO 2005-II

En un triángulo ABD se ubica Q en la región exterior relativo a $\overline{BD}$, tal que AD=DQ; m∢BAQ = 30°; m∢ABD = 18° y m∢BDQ = 42°. Calcule m∢DBQ

A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA Nº 124 1er SEMINARIO 2005-II

El número de rectas distintas que contienen a las alturas, medianas y bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo isósceles no equilátero, es:

A) 9 B) 7 C) 6
D) 5 E) 3

PROBLEMA Nº 125 1er SEMINARIO 2005-II

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores AE, BD y CG intersecandose en I. Si $m\sphericalangle AID = 78°$ y $m\sphericalangle DIC = 58°$.

Calcule $m\sphericalangle BAC - m\sphericalangle BCA$

A) 40° B) 38° C) 44°
D) 25° E) 20

PROBLEMA Nº 126 1er SEMINARIO 2005-II

En un triángulo escaleno sus lados miden 4u, 3u y $\sqrt{x^2 - 2}$u. ¿Cuántos valores enteros tiene x?

A) 6 B) 7 C) 12
D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 127 1er SEMINARIO 2005-II

¿Cuál es el número de triángulos escalenos, tal que las longitudes de sus lados son números enteros y su perímetro es menor que 13?

A) 3 B) 5 C) 7
D) 4 E) 8

PROBLEMA Nº 128 1er SEMINARIO 2006-I

En un triángulo isósceles ABC (AB = AC), $m\sphericalangle A = 80°$, en el interior del triángulo se ubica M, tal que $m\sphericalangle MBC = 30°$ y $m\sphericalangle MCB = 10°$. Calcule $m\sphericalangle AMC$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 70° E) 75°

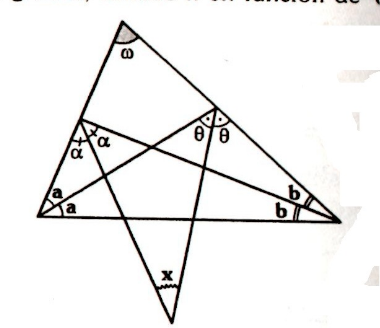
PROBLEMA Nº 129 1er SEMINARIO 2006-I

En el triángulo ABC(AB = BC), $\overline{AD}$ es bisectriz interior y en el triángulo ADC se traza la bisectriz interior $\overline{DM}$ y $\overline{DN}$ e... bisectriz exterior con N en $\overline{AC}$. Si AD = 5u calcule MN(en u).

A) 10 B) 12 C) 8
D) 9 E) 11

PROBLEMA Nº 130 1er SEMINARIO 2006-I

Del gráfico, calcule x en función de ω.



A) $15° - \frac{\omega}{3}$ B) $45° - \frac{\omega}{5}$ C) $45° - \frac{\omega}{4}$
D) $45° + \frac{\omega}{4}$ E) $45° - \omega$

PROBLEMA Nº 131 1er SEMINARIO 2006-I

Sobre el lado AB de un triángulo ABC(AB = BC) se construye un triángulo equilátero ABE, de modo que los puntos E y C se encuentran en el mismo semiplano con respecto a $\overline{AB}$. Si $m\sphericalangle ABC = 20°$ entonces, $m\sphericalangle AEC$ es:

A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 132 1er SEMINARIO 2006-I

En un triánguo ABC, se cumple:

$$m\sphericalangle BAC = 3(m\sphericalangle BCA) \text{ y } BC = 15$$

Halle el menor valor entero de AB.

A) 9 B) 5 C) 8
D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 133 1er SEMINARIO 2006-I

En un triángulo PQR, se trazan las bisectrices interiores QE y RF, se ubica S exterior y relativo a $\overline{QR}$ tal que:

$$m\sphericalangle QFS = 3(m\sphericalangle SFR) \quad ;$$
$$m\sphericalangle RES = 3(m\sphericalangle QES) \quad y$$
$$m\sphericalangle QPR + m\sphericalangle FSE = 180°$$

Calcule $m\sphericalangle QPR$

A) 100° B) 110° C) 90°
D) 80° E) 60°

PROBLEMA Nº 134 1er SEMINARIO 2006-I

En un triángulo ABC, AB=3; AC=11 y $m\sphericalangle ABC > 90°$. Halle BC si es el mayor número entero posible.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

PROBLEMA Nº 135 1er SEMINARIO 2006-I

En el triángulo ABC(AB = BC), D ∈ $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ es perpendicular a $\overline{AC}$ (E en $\overline{AC}$). La prolongación de $\overline{DE}$ interseca al rayo CX, que forma con $\overline{CA}$ un ángulo de igual medida que $\sphericalangle BCA$, en el punto F. Si AD=a y CF=b. Calcule BD

A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{2b-a}{2}$ C) $\frac{2a-b}{2}$
D) $\frac{b-a}{2}$ E) $b - 2a$

PROBLEMA Nº 136 1er SEMINARIO 2006-I

En el interior de un triángulo ABC se ubica M tal que AB = AM = MC

$m\sphericalangle BCM = 3\alpha$; $m\sphericalangle CAM = 2\alpha$
$m\sphericalangle ABC = 13\alpha$. Calcule α.

A) 5° B) 6° C) 10°
D) 12° E) 15°

PROBLEMA Nº 137 1er SEMINARIO 2006-I

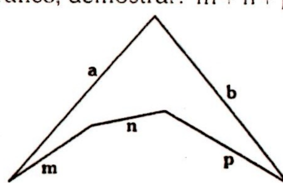
Demostrar que en un triángulo, la medida del ángulo entre una altura con la bisectriz interior trazadas desde el mismo vértice es igual a la semidiferencia de medidas de los otros dos ángulos interiores del triángulo.

PROBLEMA Nº 138 1er SEMINARIO 2007-

Demostrar que en todo triángulo rectángulo, la hipotenusa siempre es mayor que cualquier cateto.

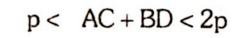
PROBLEMA Nº 139 1er SEMINARIO 2007-II

En el gráfico, demostrar: $m + n + p < a + b$

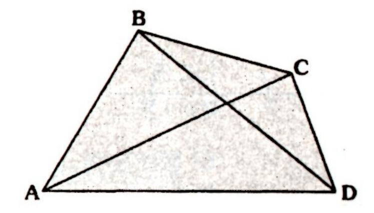


PROBLEMA Nº 140

En el gráfico "p" es el semiperímetro de la región ABCD, demostrar :



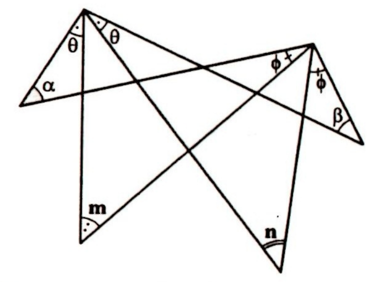
$$p < AC + BD < 2p$$





PROBLEMA Nº 141

En el gráfico, $m+n=120°$. calcule $\alpha+\beta$



A) 60° B) 100° C) 120°
D) 150° E) 90°

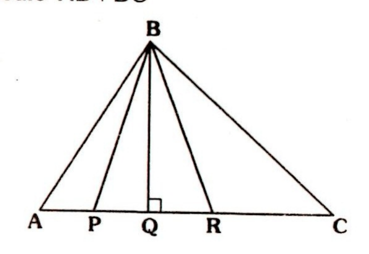
PROBLEMA Nº 142

En el gráfico, AP=3, PR=10, PC=12,

$m\measuredangle BAC=2(m\measuredangle QBR)$ y

$m\measuredangle ACB=2(m\measuredangle PBQ)$.

Calcule AB+BC



A) 20 B) 25 C) 55
D) 32 E) 30

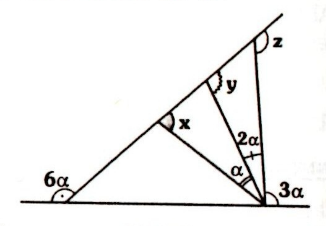
PROBLEMA Nº 143

Del gráfico, calcule x.

A) 150°
B) 120°
C) 135°
D) 110°
E) 140°

PROBLEMA Nº 144

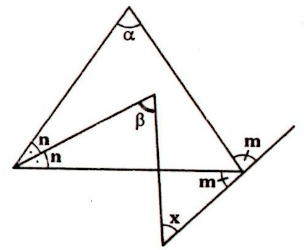
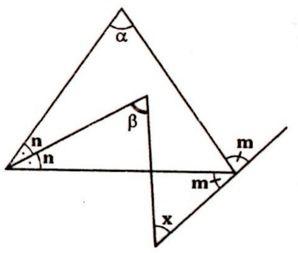
En el gráfico, $x+y+z>270°$, calcule el mayor valor entero de α.



A) 21° B) 24° C) 29°
D) 27° E) 25°

PROBLEMA Nº 145

En el gráfico, $2\beta-\alpha=70°$, calcule x.

A) 35° B) 70° C) 55°
D) 25° E) 45°

PROBLEMA Nº 146

En la región interior de un triángulo ABC, se ubica P, tal que PB=4 y PC=7. Calcule el menor valor entero del perímetro de la región ABC.

A) 10 B) 11 C) 15
D) 17 E) 18

PROBLEMA Nº 147

En el gráfico, $a-b=60°$. Calcule x.

A) 50° B) 120° C) 80°
D) 100° E) 130°

PROBLEMA Nº 148

En el gráfico, AB=BC. Calcule x.

A) 50° B) 45° C) 40°
D) 35° E) 30°

PROBLEMA Nº 149

En un triángulo las distancias de un punto interior a sus vértices son 3, 4 y 8. Calcule el mayor valor entero del perímetro.

A) 23 B) 24 C) 25
D) 29 E) 20

PROBLEMA Nº 150

En el triángulo $ABC(AB=BC)$, se ubica G en $\overline{AB}$ y F en $\overline{BC}$ tal que el triángulo FGC es equilátero. Si $m\measuredangle ACG=\alpha$.

Calcule $m\measuredangle FGB$.

A) α B) $60°-\alpha$ C) $60°+\alpha$
D) 2α E) $90°-\alpha$

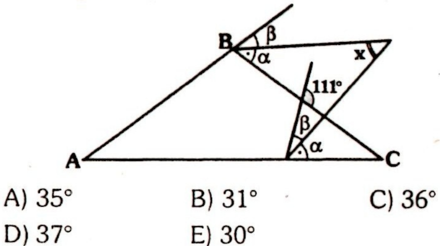
PROBLEMA Nº 151

En los lados AC y BC del triángulo ABC se ubican los puntos E y F respectivamente. De modo que AB=AF, EB=BC y $m\measuredangle ABE=m\measuredangle EBC=4(m\measuredangle FAC)$. Calcule $m\measuredangle BAF$

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 15° E) 16°

PROBLEMA Nº 152

En el gráfico, AB=BC. Calcule x.



A) 35° B) 31° C) 36°
D) 37° E) 30°

PROBLEMA Nº 153

En el triángulo ABC en las prolongacio-

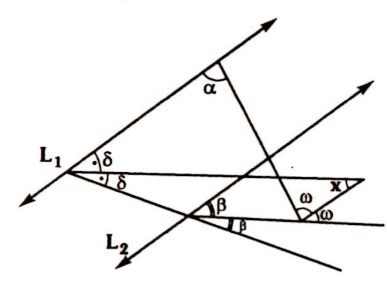
nes de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos P, Q y R respectivamente, en $\overline{PQ}$ se ubica M tal que $\overline{MR} \perp \overline{AC}$, PB = BQ y $m\measuredangle PAR - m\measuredangle ACB = 32°$.

Calcule $m\measuredangle RMQ$

A) 32° B) 48° C) 24°
D) 16° E) 29°

PROBLEMA Nº 154

En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Calcule x, en función de α y β.



A) $\alpha+\beta$ B) $\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ C) $2\alpha-\beta$

D) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ E) $2\alpha+\beta$

PROBLEMA Nº 155

En la región exterior relativa a $\overline{BC}$ del triángulo equilátero ABC se ubica el punto M, tal que:

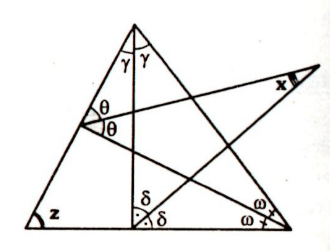
$$\overline{AM} \cap \overline{BC} = \{N\} \quad y \quad MN = MC = AB$$

Calcule $m\measuredangle CBM$.

A) 40° B) 30° C) 50°
D) 60° E) 45°

PROBLEMA Nº 156

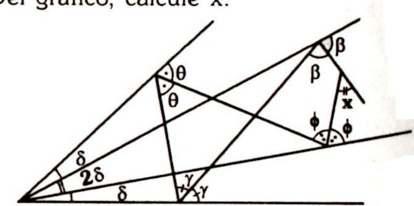
En el gráfico, el triángulo ABC es acutángulo, si z toma su mayor valor entero par, calcule x.



A) 44° B) 46° C) 23°
D) 78° E) 88°

PROBLEMA Nº 157

Del gráfico, calcule x.



A) 30° B) 45° C) 36°
D) 60° E) 72°

PROBLEMA Nº 158

Se tiene un triángulo ABD, se ubica C en la región exterior relativa a $\overline{BD}$, tal que $\overline{AD} // \overline{BC}$, AC=20 y BD=10. Calcule la diferencia del máximo y mínimo valor entero de AD+BC.

A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

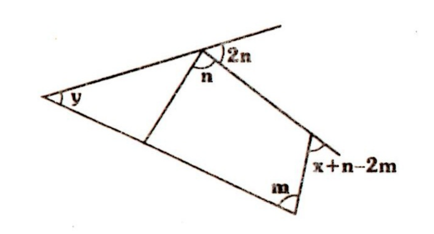
PROBLEMA Nº 159

Indique el número de triángulos escalenos cuyo perímetro sea 13 y las longitudes de sus lados sean enteras.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 160

En el gráfico, $m-n=10°$. Calcule $x-y$.



A) 40° B) 51° C) 30°
D) 91° E) 59°

PROBLEMA Nº 161

En el triángulo ABC el punto I es la intersección de las bisectrices interiores desde A y B. Por I se traza una recta perpendicular a $\overline{CI}$, la cual interseca a la bisectriz exterior trazada desde A en el punto M. La bisectriz exterior del ángulo de vértice M del triángulo MIA interseca a la prolongación de $\overline{IC}$ en T, tal que:

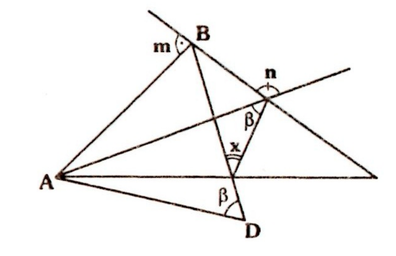
$$m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle ITM)$$

Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 60° B) 40° C) 90°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA Nº 162

En el gráfico, AB=AD y $m+n=220°$. Calcule x.



A) 30° B) 40° C) 50°
D) 35° E) 70°

PROBLEMA Nº 163

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, luego en el triángulo BDC se traza la ceviana interior DE tal que:

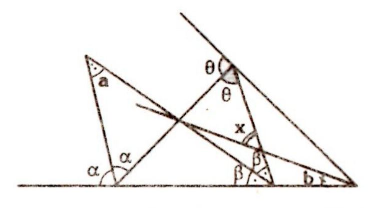
$$AB=BD=BE \quad y$$
$$m\measuredangle BAD = 3(m\measuredangle AED)$$

Calcule $m\measuredangle AED$

A) 16° B) 15° C) 18°
D) 22°30' E) 26°30'

PROBLEMA Nº 164

En el gráfico, $4a-b=160°$. Calcule x.



A) 10° B) 18° C) 20°
D) 30° E) 40°

PROBLEMA Nº 165

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AM en cuya prolongación se ubica N, si $m\measuredangle ABC = 40°$; $m\measuredangle ANC = 35°$ y $m\measuredangle BAC = m\measuredangle AMC$.

Calcule $m\measuredangle ACN$

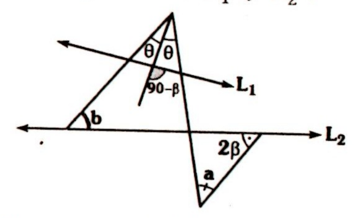
A) 105° B) 106° C) 108°
D) 100° E) 95°

PROBLEMA Nº 166

En el gráfico, CP = CQ. Calcule x.

PROBLEMA Nº 181

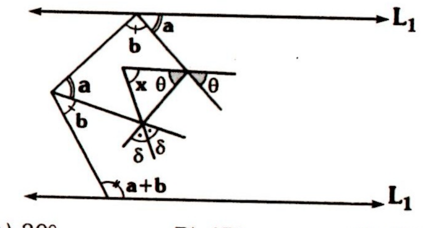
En el gráfico, $a+b=80°$. Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.



A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 55°

PROBLEMA Nº 182

En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1}//\overleftrightarrow{L_2}$, calcule x.



A) 30° B) 45° C) 60°
D) 67,5° E) 52,5°

PROBLEMA Nº 183

En un triángulo APQ se traza una recta que corta a $\overline{AP}$, $\overline{PQ}$ y a la prolongación de $\overline{AQ}$ en B, M y C respectivamente. Si $m\sphericalangle PAQ=30°$ y $AB=MC=QC$. Calcule la diferencia del mayor y menor valor entero de $m\sphericalangle APQ$.

A) 11° B) 12° C) 13°
D) 14° E) 15°

PROBLEMA Nº 184

Los lados de un triángulo tienen por longitudes $2a-1$, $6-a$ y $3a-1$. Si $a\in\mathbb{Z}^+$. Calcule la medida del mayor ángulo interior.

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 120° E) 127°

PROBLEMA Nº 185

En un triángulo ABC se ubica P en la región exterior relativa a $\overline{BC}$, tal que el perímetro de la región BPC es 12. Calcule el mayor valor entero de AC, si AB y BC son enteros y $m\sphericalangle BCA < m\sphericalangle BAC$.

A) 11 B) 9 C) 8
D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 186

El perímetro de una región triangular es 24. Si el triángulo es rectángulo, calcule el menor valor entero de la longitud de la hipotenusa.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

PROBLEMA Nº 187

Se tiene un triángulo obtusángulo, si los lados menores miden 10 y 2. ¿Cuántos valores enteros toma el mayor lado?

A) 1 B) 0 C) 2
D) 3 E) 4

PROBLEMA Nº 188

En un triángulo ABC, en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican M, N y L respectivamente. Luego se ubica P, Q y R en $\overline{MN}$, $\overline{NL}$ y $\overline{ML}$ respectivamente si $PQ=5$, $QR=6$ y $PR=7$, calcule el menor valor entero del perímetro de la región ABC.

A) 14 B) 15 C) 18
D) 19 E) 20

PROBLEMA Nº 189

En uun triángulo isósceles ABC ($AB=BC$), en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica P, tal que $AB=BP$ y $m\sphericalangle BAP=40°$. En la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica M. Calcule $m\sphericalangle PCM$

A) 30° B) 35° C) 40°
D) 45° E) 50°

PROBLEMA Nº 190

En la región exterior relativa a $\overline{AB}$ del triángulo ABC se ubica P, tal que PB=BC,

$$m\sphericalangle ACB = 2(m\sphericalangle BAC) \quad y$$
$$m\sphericalangle BAC + m\sphericalangle PBA = 60°$$

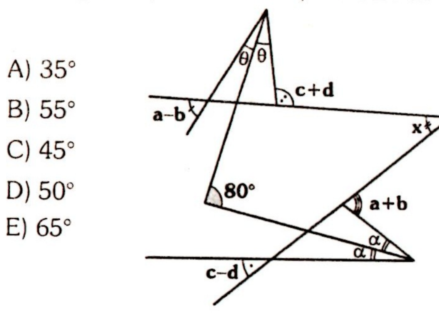
Calcule $m\sphericalangle PAB$.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 60°

PROBLEMA Nº 191

En el gráfico, $a+c=135°$, calcule x.

A) 35°
B) 55°
C) 45°
D) 50°
E) 65°



PROBLEMA Nº 192

En un triángulo ABC se ubica E en la prolongación de $\overline{BC}$ y D en $\overline{AE}$ tal que AC=CE. Si $m\sphericalangle ACB=3(m\sphericalangle DCE)$ y $ED=4$. Calcule el mayor valor entero de CD.

A) 8 B) 9 C) 3
D) 5 E) 7

PROBLEMA Nº 193

En el triángulo ABC de base AC, se traza la recta secante $\overleftrightarrow{MN}$ que interseca a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y a la prolongación de $\overline{AC}$ en P, Q y R respectivamente (P, Q y R en $\overleftrightarrow{MN}$). Si $m\sphericalangle BPM=b$ y $m\sphericalangle CQR=a$.

Calcule $m\sphericalangle QRC$.

A) $90°-(a+b)$ B) $\dfrac{a+b}{2}$
C) $90°-\dfrac{(a+b)}{2}$ D) $\dfrac{b-a}{2}$
E) $45°-\dfrac{(a+b)}{4}$

PROBLEMA Nº 194

En el triángulo ABC se trazan la cevianas interiores AM y CN de modo:

$$m\sphericalangle BNC = m\sphericalangle AMC$$

y la medida del menor ángulo determinado por las bisectrices de los ángulos ANC y AMC es igual a la medida del ángulo ABC. Calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) 45° B) 60° C) 90°
D) 30° E) 72°

PROBLEMA Nº 195

En el triángulo acutángulo ABC se trazan las bisectrices interiores BF y CE. Si $m\sphericalangle BAC$ toma su mayor valor entero par, calcule la medida del ángulo que

determinan las bisectrices de los ángulos BFC y CEB.

A) 23° B) 19° C) 21°
D) 30° E) 29°

PROBLEMA Nº 196

Dado el triángulo ABC, en la prolongación de la bisectriz interior AM se ubica P tal que :

$$m\sphericalangle ABC + 2(m\sphericalangle APC) = 40°$$

Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AP}$ y la bisectriz del ángulo determinado por CP y la bisectriz interior CQ del triángulo ABC.

A) 80° B) 75° C) 55°
D) 90° E) 45°

PROBLEMA Nº 197

En el triángulo ABC, las bisectrices interiores AM y CN se intersecan en I, en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica Q, de modo que :

$$m\sphericalangle ABQ + m\sphericalangle ABC + m\sphericalangle BQC = 180°$$

los ángulos BAC y BAI son suplementarios lo mismo que QCA y QCI. Calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) 36° B) 45° C) 72°
D) 30° E) 60°

PROBLEMA Nº 198

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM, BN y CL de modo que las dos primeras se cortan en S y la tercera corta a $\overline{SB}$ y $\overline{SM}$ en R y Q respectivamente de modo que RQ = QS.

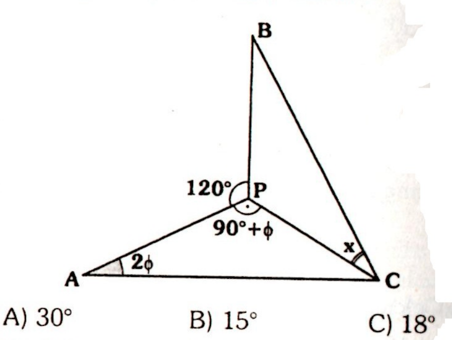
Si $m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle NBC = 15°$ y $m\sphericalangle MCQ = 28°$

Calcule $m\sphericalangle LBN$

A) 11° B) 28° C) 15°
D) 43° E) 14°

PROBLEMA Nº 199

En el gráfico, BP = AC, calcule x.



A) 30° B) 15° C) 18°
D) 45° E) 36°

PROBLEMA Nº 200

Se tiene el triángulo ABC, en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ se ubican P y Q de modo que:

$$\frac{m\sphericalangle BAC}{m\sphericalangle QBC} = \frac{m\sphericalangle BCA}{m\sphericalangle ABP} = \frac{m\sphericalangle ABQ}{m\sphericalangle ACQ} = \frac{m\sphericalangle PBC}{m\sphericalangle PAC} = 1$$

Si AC=9 y (AB + BC) es mínimo entero.

Calcule el máximo valor entero de PQ

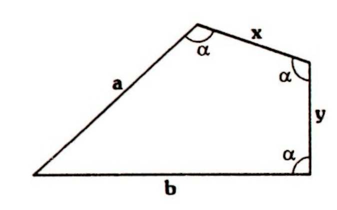
A) 18 B) 19 C) 17
D) 8 E) 16

Problemas Propuestos

Ciclo Semestral Intensivo

PROBLEMA Nº 201

En el gráfico, $90° < \alpha < 120°$, indique la alternativa correcta.



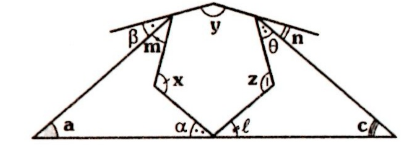
A) $xy > ab$ B) $xy < ab$
C) $x^2 + y^2 < a^2 + b^2$ D) $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$
E) $xy = ab$

PROBLEMA Nº 202

En el gráfico:

$$m + n + \ell = 60° \quad y \quad \alpha + \theta + \beta = 40°$$

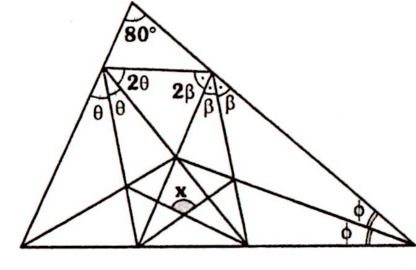
Calcule $x + y + z$



A) 200° B) 280° C) 240°
D) 300° E) 220°

PROBLEMA Nº 203

Del gráfico calcule x.



A) 115° B) 105° C) 120°
D) 140° E) 135°

PROBLEMA Nº 204

Se tiene el triángulo ABC, se ubica D en la región exterior relativa a $\overline{AC}$.

Si $m\sphericalangle BCA = 30°$; $m\sphericalangle ABD = 60°$; $m\sphericalangle BAC = 48°$ y $m\sphericalangle DAC = 12°$

Calcule $m\sphericalangle BDC$.

A) 84° B) 96° C) 98°
D) 104° E) 102°

PROBLEMA Nº 205

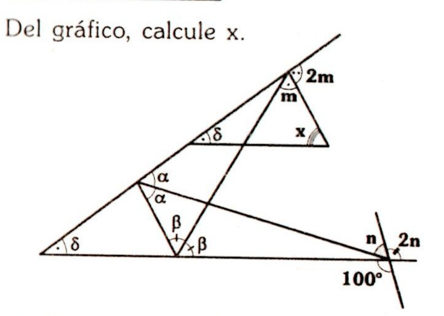
En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BD y la bisectriz interior CN. Si $m\sphericalangle BNC$ toma su mayor valor entero par y los ángulo ABD y ABC son suplementarios.

Calcule $m\sphericalangle BDA$.

A) 6° B) 8° C) 4°
D) 5° E) 7°

PROBLEMA Nº 206

Del gráfico, calcule x.



A) 50° B) 60° C) 70°
D) 80° E) 100°

PROBLEMA Nº 207

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AP tal que:

$$m\sphericalangle PAC=\frac{m\sphericalangle BAP}{3}=\frac{m\sphericalangle PCA}{2} \quad y$$

$$AC=BP+PC$$

Calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) 72° B) 60° C) 78°
D) 36° E) 45°

PROBLEMA Nº 208

En el triángulo ABC, se ubican P, Q y R en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $m\sphericalangle PRQ=60°$, AR=RP y RQ=RC.

Calcule la medida del ángulo entre la bisectriz interior trazada de P y la exterior trazada de Q para el triángulo PBQ.

A) 30° B) 20° C) 15°
D) 60° E) 45°

PROBLEMA Nº 209

Se tiene el triángulo isósceles ABC ($\overline{AC}$: base), se ubican M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

Si : AM = MN = AC y $m\sphericalangle AMN=60°$

Calcule: $m\sphericalangle ACB-m\sphericalangle ABC$

A) 30° B) 60° C) 45°
D) 36° E) 72°

PROBLEMA Nº 210

En el triángulo ABC se ubica P exterior y relativo a $\overline{BC}$ y en la prolongación de $\overline{PC}$ el punto Q tal que $m\sphericalangle BCP=m\sphericalangle ACQ$ y $2(m\sphericalangle APC)=m\sphericalangle ABC$. Luego se ubica el punto R en $\overline{AC}$ tal que:

$$m\sphericalangle ABR=m\sphericalangle ACB \quad y \quad m\sphericalangle RBC=40°$$

Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AP}$ y una recta perpendicular a $\overline{BR}$.

A) 10° B) 18° C) 20°
D) 22,5° E) 30°

PROBLEMA Nº 211

En el triángulo ABC(AB = BC), se cumple que $m\sphericalangle ABC$ toma su mayor valor entero. Calcule la medida del ángulo entre la altura relativa a $\overline{AC}$ y la bisectriz exterior AM (M en la prolongación de $\overline{BC}$).

A) 30°15' B) 45° C) 30°
D) 15° E) 22°30'

PROBLEMA Nº 212

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se traza la ceviana interior AM, tal que AM=AC.

Calcule la diferencia del mayor y menor entero de $m\sphericalangle AMC$.

A) 27° B) 29° C) 28°
D) 30° E) 31°

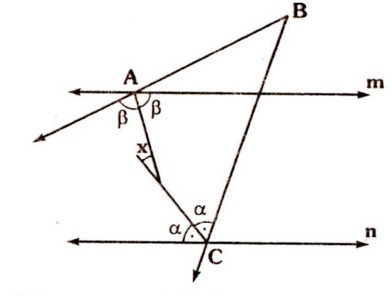
PROBLEMA Nº 213

En el triángulo ABC (recto en B), exteriormente se traza el triángulo equilátero BCD, se ubica M en $\overline{AC}$ tal que $\overline{MD}\cap\overline{BC}=\{N\}$, si MC=DC y $m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle BNM$. Calcule $m\sphericalangle BAC$

A) 60° B) 70° C) 80°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 214

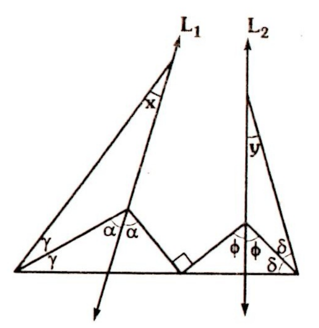
En el gráfico $\overleftrightarrow{m}//\overleftrightarrow{n}$ y $\sphericalangle ABC$ es agudo. Calcule el mayor valor entero de x.



A) 30° B) 44° C) 46°
D) 59° E) 61°

PROBLEMA Nº 215

En el gráfico, la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ es θ. Calcule x + y



A) θ B) $\frac{3}{2}\theta$ C) 2θ
D) 3θ E) $\frac{5}{2}\theta$

PROBLEMA Nº 216

En el triángulo acutángulo ABC se ubica L exterior y relativo a $\overline{BC}$ tal que:

$$m\sphericalangle BAL=2(m\sphericalangle LAC) \quad ;$$

$$m\sphericalangle BCE=3(m\sphericalangle LCE)$$

E se encuentra en la prolongación de $\overline{AC}$.

Calcule el mayor valor entero de $m\sphericalangle ALC$

A) 31° B) 44° C) 46°
D) 29° E) 14°

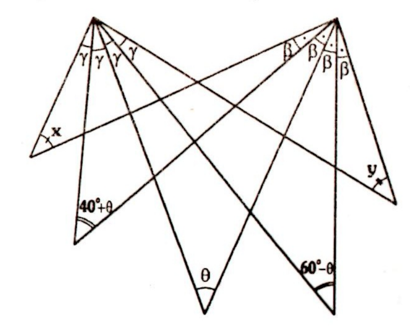
PROBLEMA Nº 217

En el triángulo ABC(AB = BC), la bisectriz interior y exterior trazadas desde A y C respectivamente, las cuales se cortan en E. Si AB=8, calcule la suma entre el mayor y menor entero de AE.

A) 20 B) 16 C) 27
D) 24 E) 25

PROBLEMA Nº 218

Del gráfico, calcule x + y.



A) 60° B) 40° C) 50°
D) 30° E) 100°

PROBLEMA Nº 219

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AP y CQ tal que $AP = AC$; $AQ = QC = BC$ y $m\sphericalangle BAP = \frac{3}{2} m\sphericalangle PAC$.

Calcule $m\sphericalangle QAC$.

A) 32° B) 34° C) 36°
D) 180°/7 E) 225°/7

PROBLEMA Nº 220

En el triángulo ABC se traza las cevianas interiores BP y CQ, tal que

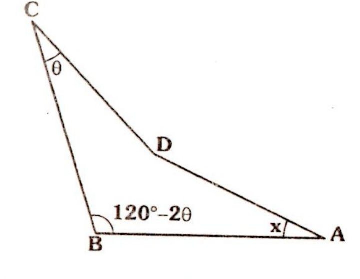
$$m\sphericalangle AQP = m\sphericalangle BQC \ ;$$
$$m\sphericalangle QPA = m\sphericalangle BPC \ ;$$
$$4(m\sphericalangle ABP) = 3(m\sphericalangle BCQ) \quad y$$
$$4(m\sphericalangle QCA) = 3(m\sphericalangle CBP)$$

Calcule $m\sphericalangle BAC$

A) 20° B) 40° C) 30°
D) 35° E) 25°

PROBLEMA Nº 221

En el gráfico, $AB = AD = BC$ calcule x.



A) θ B) 2θ C) 60° – θ
D) 30° + θ E) 30° – θ

PROBLEMA Nº 222

En el triángulo ABC, se ubica P en $\overline{AC}$, R en $\overline{CP}$ y Q en $\overline{BC}$.

Si: $AB = BP = PQ = QR = RC$ y $m\sphericalangle ACB$ es el mayor valor entero par, calcule $m\sphericalangle ABP$.

A) 4° B) 2° C) 6°
D) 3° E) 5°

PROBLEMA Nº 223

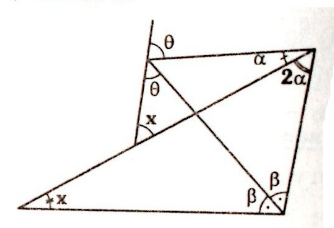
En el triángulo ABC (obtuso en B) se cumple que $(AB)^2 + (BC)^2 = 100$, se traza el triángulo equilátero AEC, calcule la diferencia de perímetros enteros máximo y mínimo de AEC.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 7

PROBLEMA Nº 224

Del gráfico, calcule x.

A) 30°
B) 36°
C) 34°
D) 60°
E) 44°



PROBLEMA Nº 225

En los lados AC y BC del triángulo ABC se ubican M y N tal que $NC = AM = AB$, si $m\sphericalangle ABC = 80°$ y $m\sphericalangle BCA = 40°$. Calcule $m\sphericalangle NMC$

A) 80° B) 110° C) 120°
D) 130° E) 170°

PROBLEMA Nº 226

En la región exterior relativa a $\overline{AB}$ del triángulo ABC se ubica D, tal que:

$AD = AB$; $AC = BC + BD$ y
$m\sphericalangle ABC = 2(m\sphericalangle ACB) = 2(m\sphericalangle BAD)$

Calcule $m\sphericalangle ACB$.

A) 30° B) 45° C) 72°
D) 48° E) 34°

PROBLEMA Nº 227

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, tal que $m\sphericalangle BAD = 40°$; $CD = AB + BD$ y $m\sphericalangle DBC = 3(m\sphericalangle BCA)$.

Calcule $m\sphericalangle BCA$

A) 18° B) 20° C) 22°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA Nº 228

En el triángulo ABC en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica P, tal que:

$AB = AP = BC$; $m\sphericalangle PAC = 16°$ y
$m\sphericalangle ABC = 28°$

Calcule $m\sphericalangle APC$

A) 14° B) 15° C) 16°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 229

En un triángulo ABC se ubica D y P en la región exterior relativo a $\overline{BC}$ tal que $\overline{CP}$ y $\overline{AP}$ son bisectrices de los ángulos DCE y DAC respectivamente (E en la prolongación de $\overline{AC}$). Si $AB = BC = BD$ y $m\sphericalangle ABC = 30°$. Calcule $m\sphericalangle APC$.

A) 5° B) 10° C) 7,5°
D) 12,5° E) 30°

PROBLEMA Nº 230

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BM tal que: $AM = BC$;

$m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle ACB) = 2\alpha$ y
$m\sphericalangle ABM = 90° + \alpha$.

Calcule α.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 18° E) 36°

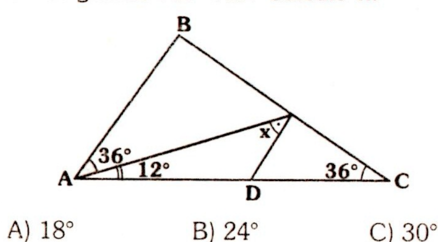
PROBLEMA Nº 231

En el interior del triángulo ABC se ubica P, tal que $PB = PC$; $m\sphericalangle PCA = 30°$ y $m\sphericalangle PAC = 40°$, la prolongación de $\overline{BP}$ interseca a $\overline{AC}$ en el punto T tal que $AP = TC$. Calcule $m\sphericalangle PCB$.

A) 10° B) 12° C) 25°
D) 18° E) 30°

PROBLEMA Nº 232

En el gráfico $AB = AD$. Calcule x.



A) 18° B) 24° C) 30°
D) 38° E) 36°

PROBLEMA Nº 233

En el triángulo ABC, las bisectrices del ángulo exterior de vértice C y del ángulo BAC se cortan en P. Si las bisectrices de los ángulos ABC y APC se cortan en Q, tal que:

$\overline{QB} \cap \overline{AC} = \{R\}$ y $m\sphericalangle QBP = 2(m\sphericalangle BRA)$

Calcule $m\sphericalangle BRA$.

A) 18° B) 27° C) 45°
D) 36° E) 24°

PROBLEMA Nº 234

En el triángulo ABC se traza la bisectriz exterior BD $(AB > BC)$ y en la prolongación de $\overline{BA}$ se ubica el punto L. Si $m\sphericalangle BDC = 40°$, calcule :

$$m\sphericalangle LAC + m\sphericalangle ACB$$

A) 200° B) 240° C) 260°
D) 220° E) 225°

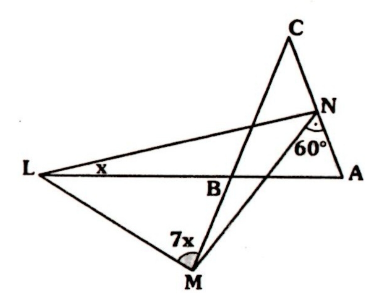
PROBLEMA Nº 235

En el triángulo ABC se trazan la ceviana interior BE y la bisectriz interior CD, las cuales se cortan en F. Si $AB = AE$ y $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle BFC$, calcule $m\sphericalangle EFC$

A) 45° B) 90° C) 75°
D) 60° E) 72°

PROBLEMA Nº 236

En el gráfico, $AC = BC$ y $MN = ML$, calcule x.

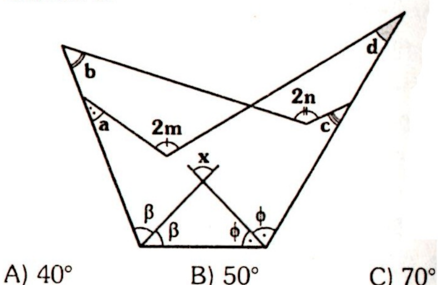


A) 8° B) 12° C) 14°
D) 10° E) 16°

PROBLEMA Nº 237

En el gráfico, $a + b + c + d = 160°$ y $m + n = 160°$

Calcule x.



A) 40° B) 50° C) 70°
D) 80° E) 90°

PROBLEMA Nº 238

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AN y la altura BH del triánguo ABN, tal que:

$NC > BN$; $m\sphericalangle ABC = 120$;

$m\sphericalangle HBN = \alpha$ y $m\sphericalangle NAC = \alpha - 30'$

Calcule el menor valor entero de α.

A) 20° B) 19° C) 18°
D) 31° E) 35°

PROBLEMA Nº 239

En el triángulo equilátero ABC en la región exterior relativa a $\overline{AB}$ se ubica D tal que :

$m\sphericalangle ADC = 30°$ y $m\sphericalangle DCB = 50°$

Calcule $m\sphericalangle DBA$

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 15° E) 18°

PROBLEMA Nº 240

En un triángulo ABC, se ubican D y E en $\overline{AC}$ y en la prolongación de $\overline{AB}$ respectivamente.

Si $BE = BC = DC$; $m\sphericalangle ACB = 10°$ y $m\sphericalangle BAC = 50°$

Calcule $m\sphericalangle AED$.

A) 8° B) 9° C) 10°
D) 5° E) 15°

PROBLEMA Nº 241

Dado el triángulo ABC, en la región exterior relativos a los lados AC y BC se ubican los puntos N y Q respectivamente, tal que N, C y Q son colineales.

Si : $m\sphericalangle BAQ = m\sphericalangle QAC$;

$m\sphericalangle ACN = 3(m\sphericalangle BCQ)$ y

$2(m\sphericalangle BCQ) + m\sphericalangle ABC = 100°$

Calcule $m\sphericalangle AQN$.

A) 25° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 80°

PROBLEMA Nº 242

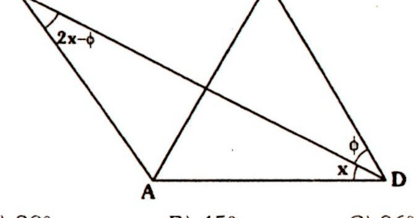
En el triángulo isósceles ABC de base AC, se traza la ceviana interior BM y en el triángulo MBC la bisectriz interior BN. Calcule la razón entre la medida del ángulo ABM con la medida del menor ángulo entre $\overleftrightarrow{AC}$ y una recta perpendicular a $\overline{BN}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 3/2 E) 4/3

PROBLEMA Nº 243

En el gráfico: $AB = AC = CD$

Calcule x.



A) 30° B) 45° C) 36°
D) 18° E) 22,5°

PROBLEMA Nº 244

Dado el triángulo ABC, en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos E y D respectivamente.

Si $m\sphericalangle ABC = 30°$ y

$m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle BCE = m\sphericalangle DAC + m\sphericalangle ECA$

Calcule la medida del ángulo determinado por las bisectrices de los ángulo AEC y ADC.

A) 25° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA Nº 245

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AD y BE tal que $AB = BE$; $AD = DC$: $m\sphericalangle DAC = m\sphericalangle ABE = \phi$ y $m\sphericalangle EBC = 6\phi - 120°$. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{BE}$ y $\overline{AD}$.

A) 103° B) 104° C) 105°
D) 106° E) 107°

PROBLEMA Nº 246

En el interior del triángulo ABC se ubica el punto D, de modo que $AD = DC = BC$.

Si $m\sphericalangle BAD = 3x$; $m\sphericalangle DCB = 8x$ y

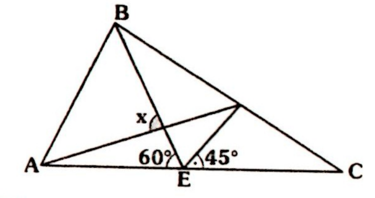
$m\sphericalangle DCA = 45° - 5x$.

Calcule x.

A) 5° B) 6° C) 7,5°
D) 8° E) 10°

PROBLEMA Nº 247

En el gráfico, $AB = BE = EC$, calcule x.



A) 90° B) 82,5° C) 75°
D) 67,5° E) 97,5°

PROBLEMA Nº 248

En el triángulo $ABC(AC = CB)$ se ubica P en la región interior tal que:

$m\sphericalangle BAP = 30°$, $m\sphericalangle PAC = 2\theta$ y

$m\sphericalangle PBC = \theta$

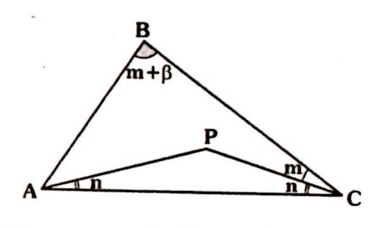
Calcule $m\sphericalangle PCB$

A) $30° - \theta$ B) θ C) $\theta/2$
D) $30° + \theta$ E) $45° - 2\theta$

PROBLEMA Nº 249

En el gráfico, $AB = PC$ y $\beta = 2(m+n)$.

Calcule β.



A) 45° B) 60° C) 90°
D) 75° E) 30°

PROBLEMA Nº 250

En el exterior de un triángulo ABC y relativo a $\overline{BC}$ se ubica P, tal que $AB = BC = AP = BP$, si $m\sphericalangle PAC = 12°$. Calcule $m\sphericalangle APC$.

A) 16° B) 18° C) 15°
D) 20° E) 22,5°

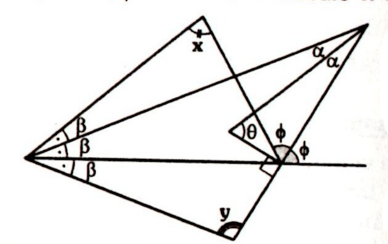
PROBLEMA Nº 251

En el triángulo AFD se trazan las cevianas interiores AC y DB secantes en S. Si $AB = BC = CD$ y $m\sphericalangle ASD = 3(m\sphericalangle AFC)$. Calcule $m\sphericalangle AFC$.

A) 36° B) 30° C) 60°
D) 45° E) 72°

PROBLEMA Nº 252

En el gráfico, $\beta + \theta = 110°$. Calcule $x + y$.



A) 120° B) 110° C) 135°
D) 125° E) 140°

PROBLEMA Nº 253

En el triángulo isósceles ABC de base AC se trazan las cevianas interiores AM y CN, las cuales se cortan en R y en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ se ubica Q, tal que:

$m\sphericalangle MRC = m\sphericalangle BAC$;

$m\sphericalangle ANQ = 2(m\sphericalangle AMQ)$ y

$m\sphericalangle QMC = 2(m\sphericalangle QNC)$

Calcule $m\sphericalangle NQM$.

A) 36° B) 45° C) 60°
D) 54° E) 72°

PROBLEMA Nº 254

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BF, tal que $m\sphericalangle BAC = 4°$; $AB < FC$ y $BC = FC$, calcule el valor entero de $2(m\sphericalangle ABF)$.

A) 188° B) 186° C) 169°
D) 184° E) 189°

PROBLEMA Nº 255

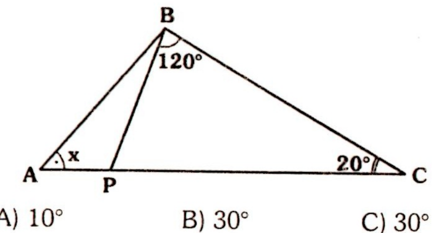
En el triángulo ABC se ubica en la región interior P, si $BP = AC$; $m\sphericalangle ACP = 18°$; $m\sphericalangle PAC = 48°$ y $m\sphericalangle APB = 120°$.

Calcule $m\sphericalangle PBC$.

A) 12° B) 18° C) 20°
D) 24° E) 30°

PROBLEMA Nº 256

En el gráfico, $AC = PB + BC$, calcule x.



A) 10° B) 30° C) 30°
D) 25° E) 35°

PROBLEMA Nº 257

En el triángulo ABC, en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica Q, a partir del cual se traza una recta que corta a $\overline{BC}$ en E y a $\overline{AB}$ en D. Si $AQ = AB = QD$ y $m\sphericalangle BCQ = 134°$. Calcule el mayor valor entero $m\sphericalangle ABC$.

A) 65° B) 41° C) 43°
D) 45° E) 46°

PROBLEMA Nº 258

Se tiene un triángulo rectángulo isósceles ABC, su base es $\overline{AC}$, se ubica P en la región interior tal que:

$$\frac{m\sphericalangle PBC}{3} = \frac{m\sphericalangle BAP}{2} = m\sphericalangle PCA$$

Calcule $m\sphericalangle ACP$

A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 259

En el triángulo rectángulo (recto B), se ubica P y Q en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $AP = PQ$; $m\sphericalangle BAC = 40°$ y $m\sphericalangle PQB = 70°$. Calcule $m\sphericalangle PCB$

A) 15° B) 20° C) 225°
D) 30° E) 25°

PROBLEMA Nº 260

En el triángulo sus lados miden a, b y c; y el semiperímetro de la región triangular es p. Calcule el máximo:

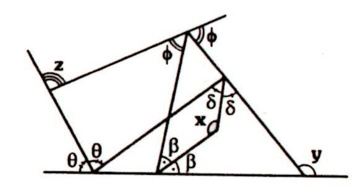
$$(p-a)(p-b)(p-c)$$

A) p^3 B) $\frac{p^3}{27}$ C) $3p^3$
D) $\frac{p^3}{3}$ E) $2p^3$



PROBLEMA Nº 261

Del gráfico, calcule $x+y+z$.



A) 180° B) 270° C) 240°
D) 260° E) 360°

PROBLEMA Nº 262

Se tiene el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se ubican los puntos E y D en la prolongación de $\overline{AC}$ y en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ respectivamente. Si DB=BC y

$$m\sphericalangle BAC + m\sphericalangle ECB = 12(m\sphericalangle ABD).$$

Calcule $m\sphericalangle ACD$.

A) 15° B) 16° C) 30°
D) 20° E) 7,5°

PROBLEMA Nº 263

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Un triángulo equilátero es un triángulo acutángulo.

II. En todo triángulo, la longitud de cualquier lado es menor que el semiperímetro.

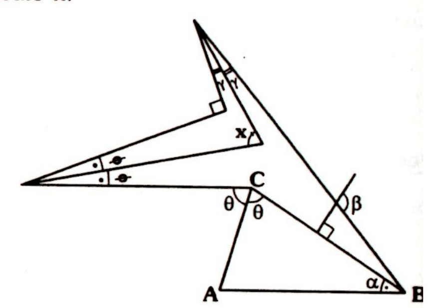
III. Existe un sólo triángulo obtusángulo cuyos lados tienen longitudes enteras consecutivas.

IV. La base de un triángulo isósceles siempre es mayor que un lado lateral.

A) VFFV B) VFVF C) VVVV
D) VVVF E) FFVV

PROBLEMA Nº 264

En el gráfico, AB=BC y $\alpha+\beta=130°$, calcule x.



A) 65° B) 75° C) 85°
D) 50° E) 70°

PROBLEMA Nº 265

En el triángulo APQ en las prolongaciones de $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{CB}$ se ubican los puntos B, C, S y L respectivamente de modo que:

$$PB+PQ=10 \quad y$$

$$m\sphericalangle CQS = m\sphericalangle LBA + m\sphericalangle LCA$$

Calcule el menor valor entero de QC.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

PROBLEMA Nº 266

En el triángulo ABC se traza la ceviana exterior BE (E en la prolongación de $\overline{CA}$).

Si $AE = AB + BC$ y

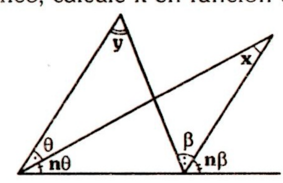
$$m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle BCA)$$

Calcule la razón de las medidas de los ángulos BEA y EBA.

A) 1 B) 1/3 C) 1/2
D) 1/4 E) 1/5

PROBLEMA Nº 267

Del gráfico, calcule x en función de n e y.



A) $\frac{y}{n}$ B) $\frac{y}{n+1}$ C) $\frac{ny}{n+1}$
D) $\frac{y}{2n-1}$ E) $\frac{y}{2n}$

RESOLUCIÓN Nº 268

En el triángulo ABC, se cumple que AB=6, BC=8 y

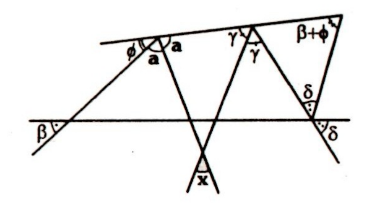
$$m\sphericalangle BAC + m\sphericalangle BCA < 90°$$

Calcule el valor entero par de AC.

A) 8 B) 10 C) 12
D) 14 E) 6

PROBLEMA Nº 269

Del gráfico, calcule x.



A) 50° B) 60° C) 30°
D) 75° E) 45°

PROBLEMA Nº 270

En el triángulo acutángulo ABC, se cumple $m\sphericalangle ABC = 4x$ y $m\sphericalangle BAC = 2x+38°$. Si x toma su mayor valor entero. Calcule $m\sphericalangle BCA$

A) 22° B) 15° C) 10°
D) 18° E) 16°

PROBLEMA Nº 271

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y CN secantes en P, si AP=3, AC=12 y PC toma su mayor valor entero. Calcule el menor valor entero de AB+BC.

A) 14 B) 12 C) 15
D) 16 E) 18

PROBLEMA Nº 272

Dado el triángulo ABC, se ubican los puntos P y Q en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $AB = BQ$ y $PC = QC$, si los ángulos ABQ y PCQ son complementarios. Calcule $m\sphericalangle BQP$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 273

En el triángulo ABC, se trazan las cevianas interiores BD y BE (E en $\overline{CD}$), tal que DB=DA; EB=EC y m∡DBE = 20°. Calcule la medida de ángulo entre las bisectrices de los ángulos BAC y BCA.

A) 140° B) 150° C) 160°
D) 120° E) 170°

PROBLEMA Nº 274

En un triángulo ABC(AB = BC), se ubica E y D en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, si AC = CE = ED = BD. Calcule $\frac{m∡ABC}{m∡ACE}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

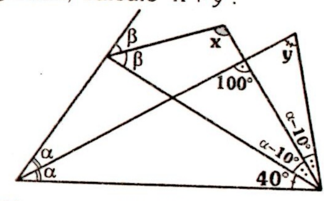
PROBLEMA Nº 275

Se tiene un ángulo BAD, se ubica en la región interior el punto C, si m∡BAD = 80°; m∡ADC = 60°; BC=CD y AD=AB+CD. Calcule m∡BCD.

A) 100° B) 110° C) 120°
D) 140° E) 130°

PROBLEMA Nº 276

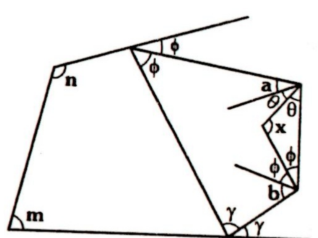
Del gráfico, calcule x + y.



A) 200° B) 205° C) 210°
D) 220° E) 215°

PROBLEMA Nº 277

En el gráfico m + n = 260° y a + b = 120°. Calcule x.



A) 105° B) 95° C) 115°
D) 125° E) 135°

PROBLEMA Nº 278

Se tiene el triángulo ABC en el cual se traza la bisectriz interior BJ en cuya prolongación se ubica E, en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica D, tal que $\overline{ED}$ corta a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en N e I respectivamente.

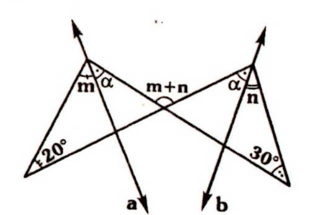
Si: m∡CBD = m∡ABJ y
m∡BDI = m∡ACB

Calcule m∡AJB + m∡BID.

A) 90° B) 120° C) 180°
D) 150° E) 270°

PROBLEMA Nº 279

Del gráfico, calcule la medida del ángulo entre $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$.



A) 50° B) 40° C) 25°
D) 70° E) 60°

PROBLEMA Nº 280

En el triángulo equilátero ABC, se ubica P en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ de modo que:

AP=AC y m∡BCP = 2(m∡PBC)

Calcule m∡PBC.

A) 5° B) 10° C) 12°
D) 15° E) 18°

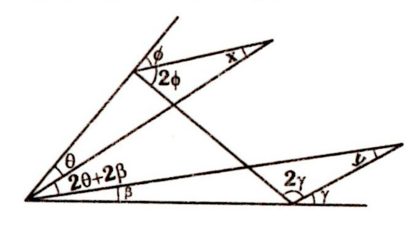
PROBLEMA Nº 281

En la región exterior relativa a $\overline{AC}$ del triángulo ABC, se ubica D, tal que AB = BD = DC y m∡ABD = 2(m∡ACD). Calcule m∡CAD

A) 20° B) 10° C) 30°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 282

Del gráfico, calcule x + y.



A) 30° B) 45° C) 60°
D) 50° E) 70°

PROBLEMA Nº 283

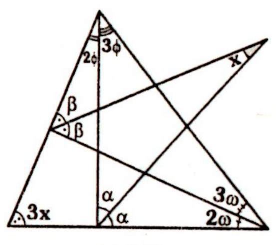
Sean $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ cevianas interiores del triángulo ABC, tal que AB = BN y AM=MC. Si $\overline{BN} \cap \overline{AM}$ = {L}.

Calcule m∡ABC + m∡MLN

A) 90° B) 180° C) 240°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA Nº 284

Del gráfico calcule x.



A) 15° B) 30° C) 22°30'
D) 32°30' E) 37°30'

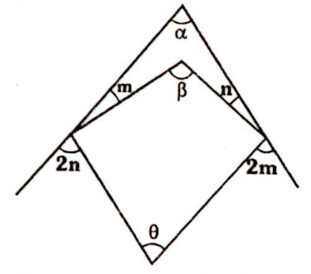
PROBLEMA Nº 285

En un triángulo ABC se cumple BC = AB + k(k ∈ $\mathbb{R}^+$) y m∡ABC = 111°, calcule el mayor valor entero del menor ángulo interior del triángulo.

A) 31° B) 29° C) 33°
D) 34° E) 36°

PROBLEMA Nº 286

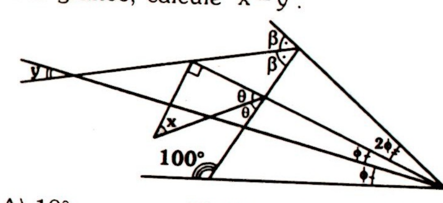
Del gráfico, indique la relación correcta:



A) 2β = 3α – θ B) 2β = α + θ
C) 2β = 3α + θ D) β = 2α – θ
E) 3β = 4α – θ

Problema Nº 287

Del gráfico, calcule $x - y$.



A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

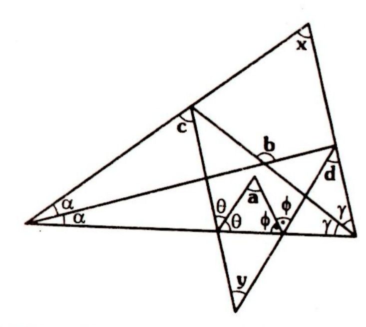
Problema Nº 288

Se tiene el triángulo ABC, se ubica M y N en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. La suma de las medidas de los ángulos exteriores en A y B es 220°. Si $\overline{MN}$ corta a la bisectriz exterior trazada desde C en T y CN=NM. Calcule m∢CTN

A) 30° B) 40° C) 50
D) 70° E) 80°

Problema Nº 289

En el gráfico, $a+b=220°$ y $c+d=140°$, calcule "x" e "y".



A) 110° y 30° B) 120° y 20°
C) 100° y 40° D) 70° y 70°
E) 90° y 50°

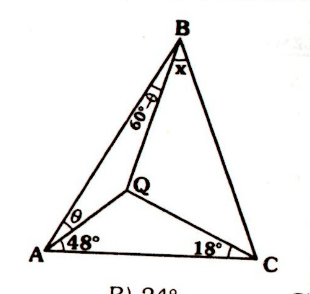
Problema Nº 290

En un triángulo rectángulo ABC (recto en B) se traza la altura $\overline{BH}$ y las bisectrices interiores $\overline{CD}$ y $\overline{AE}$ cortan a $\overline{BH}$ en Q y P. Si BD=a y BE=b, calcule PQ (considere b>a)

A) $a - \frac{b}{2}$ B) $b - a$ C) $\sqrt{b^2 - a^2}$
D) $\sqrt{ab}$ E) $2b - a$

Problema Nº 291

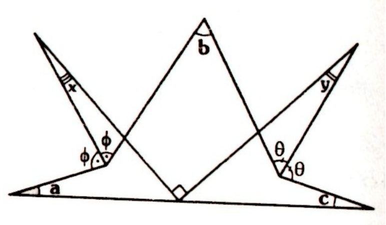
En el gráfico, BQ = AC, calcule x.



A) 30° B) 24° C) 26°
D) 36° E) 34°

Problema Nº 292

Del gráfico, calcule $x+y$ en función de a, b y c.

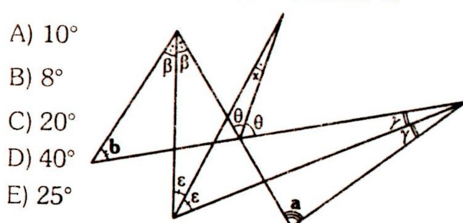


A) $\frac{a+b+c}{2}$ B) $\frac{b-a-c}{2}$
C) $a+b+c$ D) $a+b-c$
E) $a-c-b$

Problema Nº 293

Del gráfico, $a - b = 40°$. Calcule x.

A) 10°
B) 8°
C) 20°
D) 40°
E) 25°



Problema Nº 294

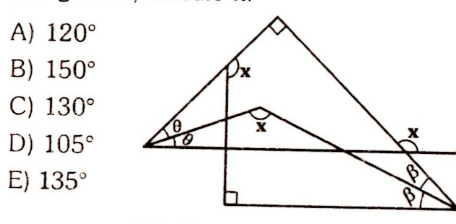
En un triángulo rectángulo ABC se traza la altura BH y la ceviana interior AE secantes en M. Si BE=BM, ¿Qué línea notable es $\overline{AE}$ para el triángulo BAC?

A) Mediana B) Bisectriz interior
C) Altura D) Simediana
E) Cualquier ceviana

Problema Nº 295

Del gráfico, calcule x.

A) 120°
B) 150°
C) 130°
D) 105°
E) 135°



Problema Nº 296

En el triángulo ABC se cumple m∢ABC = 115° y m∢ACB = 45°. Se ubica P en $\overline{AC}$ y Q en $\overline{BC}$ tal que:

m∢PBC = 65° y m∢QPC = 35°

Calcule m∢AQP.

A) 15° B) 20° C) 25°
D) 35° E) 30°

Problema Nº 297

En el triángulo ABC, se trazan las bisectrices interiores AN y CM, tal que:

m∢BMN = m∢CMA y

m∢MNB = m∢ANC

Calcule m∢ABC.

A) 60° B) 75° C) 80°
D) 36° E) 48°

Problema Nº 298

Del gráfico, calcule x.

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 15°
E) 25°

Problema Nº 299

En el triángulo ABC(AB = BC), se trazan las cevianas interiores $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$, las cuales se cortan en F. Si m∢ABF = 20° y BF = BD. Calcule m∢DAC.

A) 5° B) 10° C) 20°
D) 30° E) 40°

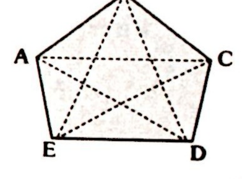
Problema Nº 300

En el gráfico, el perímetro de la región sombreada es 20cm si:

AC = BD = AD = EC = EB

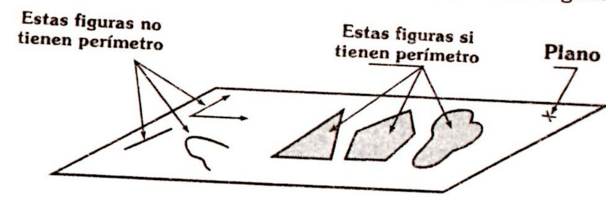
Calcule el mayor valor entero de AC.

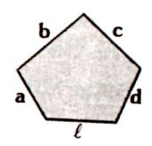
A) 3cm
B) 4cm
C) 5cm
D) 6cm
E) 7cm



ACERCA DEL PERÍMETRO

Se llama perímetro a la longitud del contorno o frontera de una región plana cerrada





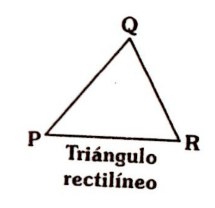
Cuando la región plana y cerrada es poligonal, su perímetro es la suma de las longitudes de sus lados.

$$\text{Perim.}_{\pentagon} = a+b+c+d+\ell$$

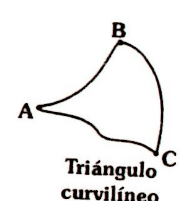
OTROS TRIÁNGULOS

Un triángulo en general, se define como la figura formada al unir tres puntos no colineales unidas mediante líneas, las cuales sólo se intersecan en los puntos mencionados.

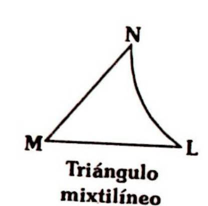
Asi tenemos:



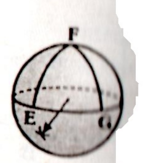
Triángulo rectilíneo



Triángulo curvilíneo



Triángulo mixtilíneo

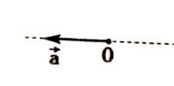


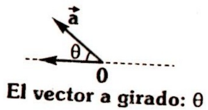
Triángulo esférico

OTRA PRUEBA DEL TEOREMA 1

Se puede partir asi:

Sea el vector "a": $\vec{a}$

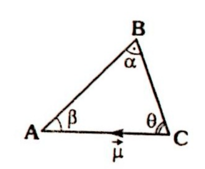


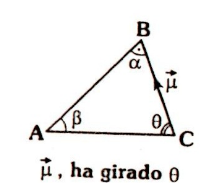


El vector a girado: θ

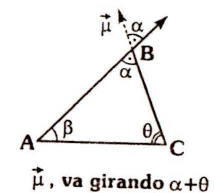
En esta posición el ángulo a girado 180°.

Dado el triángulo ABC, asociemos el vector $\vec{\mu}$, asi:

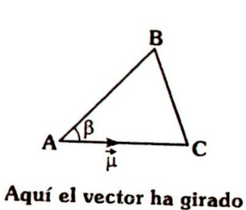




$\vec{\mu}$, ha girado θ



$\vec{\mu}$, va girando $\alpha+\theta$



Aquí el vector ha girado $\alpha+\beta+\theta$

En consecuencia :

$$\alpha+\beta+\theta=180°$$

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

En matemáticas la verdad esta constituída como la validez de una implicancia de la forma: $H \Rightarrow T$, donde H es el conjunto de hipotesis y T es la conclusión a la cual se debe llegar. Esta implicancia está regida por el principio filosófico "de la verdad no puede seguir la falsedad". Este principio constituye la fundamentación del método de demostración denominado "directo".

Si ahora consideramos dos teoremas para los cuales la tesis de uno de ellos es la hipótesis del otro y viceversa; se les llama a ellos **TEOREMAS RECÍPROCOS**. La certeza de un teorema no implica la certeza de su recíproco.

Dos teoremas se llaman contrarios cuando la hipótesis y la tesis del uno son las negaciones respectivas de la hipótesis y la tesis del otro. La certeza de un teorema no implica la del contrario.

Dos teoremas se llaman contrarecíprocos cuando cada uno de ellos es el contrario del recíproco (o recíproco del contrario) del otro.

Es muy frecuente en matemáticas demostrar un teorema probando su contrarrecíproco. Este método de demostración se llama demostración por reducción al absurdo.

Método de inducción matemática.

Se denomina inducción a todo razonamiento que comprende el paso de proposiciones partículares a generales con la particularidad de que la validez de las últimas se deduce de la validez de las primeras.

El principio de inducción matemáticas establece que para un subconjunto de enteros positivos S $(S \subset \mathbb{N})$ tal que:

a) El número 1 pertenece a $S (1 \in S)$

b) $m \in S \Rightarrow m+1 \in S$

entonces S coincide con todo el conjunto de los enteros positivos, es decir: "$S \in \mathbb{N}$"

A la hipótesis $m \in S$, se le conoce con el nombtre de hipótesis inductiva.

DESIGUALDADES ENTRE MEDIAS

Si $0 < a \le b$, entonces:

$$a \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le b$$

la igual es válida si sólo $a=b$

Generalizando para el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de números positivos se verifica

$$\text{mín}(a_1, a_2, \ldots a_n) \le \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}\right)} \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \le \sqrt{\frac{\sum_{i=a}^{n}(a_i)^2}{n}} \le \text{máx}(a_1, a_2, \ldots a_n)$$

Donde:

- La media armónica: $H = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$

- La media geométrica: $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$

- La media aritmética: $M = \dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$

- La media cuadrática: $R = \sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+..+a_n^2}{n}}$

Así como el método de inducción, los teoremas sobre desigualdades tambien son utilizados en geometría.

CLAVES DE RESPUESTAS

ANUAL

1. A	10. D	19. B	28. B	37. C	46. C	55. A
2. D	11. C	20. C	29. D	38. D	47. C	56. D
3. D	12. E	21. A	30. B	39. E	48. B	57. B
4. E	13. E	22. C	31. C	40. C	49. B	58. A
5. C	14. C	23. B	32. C	41. B	50. C	59. B
6. A	15. C	24. B	33. B	42. D	51. B	60. B
7. C	16. C	25. E	34. A	43. D	52. B	
8. C	17. C	26. A	35. C	44. B	53. A	
9. E	18. C	27. C	36. D	45. B	54. A	

CEPRE–UNI

61. E	71. B	81. D	91. E	101. E	111. D	121. D	131. A
62. E	72. E	82. B	92. C	102. B	112. D	122. D	132. D
63. C	73. B	83. D	93. A	103. A	113. C	123. B	133. A
64. A	74. D	84. E	94. D	104. C	114. A	124. B	134. C
65. D	75 C	85. A	95. D	105. B	115. B	125. A	135. D
66. B	76. B	86. C	96. B	106. D	116. B	126. C	136. B
67. E	77. B	87. C	97. C	107. C	117. D	127. A	137. *
68. D	78. D	88. E	98. C	108. B	118. C	128. D	138. *
69. C	79. E	89. A	99. B	109. C	119. D	129. A	139. *
70. E	80. E	90. E	100. B	110. B	120. A	130. C	140. *

SEMESTRAL

141. C	150. D	159. B	168. C	177. E	185. C	193. C
142. B	151. B	160. C	169. A	178. E	186. B	194. B
143. A	152. D	161. A	170. B	179. C	187. A	195. A
144. E	153. D	162. B	171. A	180. D	188. D	196. C
145. A	154. D	163. D	172. A	181. C	189. E	197. A
146. C	155. C	164. C	173. A	182. C	190. E	198. D
147. D	156. C	165. A	174. C	183. C	191. B	199. A
148. B	157. B	166. C	175. C	184. C	192. C	200. C
149. D	158. E	167. E	176. E			

* Son preguntas para demostrar

SEMESTRAL INTENSIVO

201. C	210. C	219. E	228. A	237. B	246. C	255. D
202. B	211. D	220. B	229. C	238. D	247. C	256. C
203. A	212. B	221. B	230. B	239. B	248. A	257. A
204. B	213. B	222. A	231. C	240. D	249. B	258. C
205. C	214. C	223. E	232. C	241. C	250. B	259. D
206. D	215. D	224. B	233. C	242. B	251. A	260. B
207. B	216. D	225. B	234. C	243. A	252. E	
208. D	217. D	226. A	235. D	244. D	253. C	
209. B	218. E	227. E	236. B	245.B	254. C	

REPASO

261. E	267. C	273. A	279. C	285. D	291. B	297. D
262. C	268. C	274. A	280. B	286. C	292. B	298. B
263. D	269. E	275. A	281. C	287. A	293. A	299. B
264. A	270. C	276. B	282. C	288. A	294. B	300. E
265. C	271. E	277. D	283. B	289. A	295. E	
266. E	272. B	278. C	284. C	290. B	296. C	

Bibliografía

Pedro Puig Adam (1961) Curso de Geometría Métrica. Séptima edición Nuevas gráficas S.A- Madrid

Rey Pastor 9. (1931) Elementos de Geometría- Colección Elemental Intuitiva-Madrid.

Yaglom 9.M- Golovina L.9 (1976) Inducción en la Geometría. Editorial MIR- Moscú

Ediciones Bruño (1967) Geometría Curso Superior- 14va Edición

Lages Elon (2000) La matemática de la enseñanza media- volumen 2 Instituto de Matemática y Ciencias Afines IMCA - Perú

Nicholas Kazarinoff (1961) Geometric Inequalities- Ramdom House The L.W. Singer Company- Moscú

Jaime Escobar Acosta (1990) Elementos de Geometría-Universidad de Antioquía - Dpto de Matemáticas.

Erica Parra Sánchez Miguel Valdivieso Análisis de algunos dobleces de origami mediante cabri geometre - Universidad Pedagógica Nacional - Bógota.

CEPRE-UNI Recopilación de seminarios, prácticas calificadas y exámenes parciales.

Material Bibliográfico de diferentes Instituciones Preuniversitarias.



Esta obra se terminó de imprimir en los talleres gráficos de Editorial Cuzcano

INFORMES Y VENTAS

Av. Alfonso Ugarte N°1310 OF. 212 - Breña
☎ 423-8154





…MAS RESUELT…
…E ÁLGEBRA

TOMO I

